ТЕОРИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ СОВПАДЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© М. М. Басова

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $l : dom\ l \to E_2$ — линейный фредгольмов оператор нулевого индекса такой, что $Im\ l \subset E_2$ — замкнутое множество. Обозначим $K(Y)$ — совокупность всех непустых компактных подмножеств пространства Y.

О п р е д е л е н и е 1. Классом $A(X,Y)$, где X, Y — топологические пространства, называется совокупность полунепрерывных сверху мультиотображений $G : X \to K(Y)$, удовлетворяющих условиям:

(1) G обладает однозначной ε-аппроксимацией для любого $\varepsilon > 0$;

(2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что для каждого $\delta \quad (0 < \delta < \delta_0)$ и любых двух δ-аппроксимаций $g_\delta, \widetilde{g}_\delta : X \to Y$ мультиотображения G найдется непрерывное отображение $h : X \times [0,1] \to Y$ такое, что
(i) $h(x,0) = g_\delta, \quad h(x,1) = \widetilde{g}_\delta$ для всех $x \in X$;
(ii) $h(x,\lambda)$ является ε-аппроксимацией мультиотображения G для каждого $\lambda \in [0,1]$.

К данному классу отображений принадлежат, при некоторых естественных предположениях на X и Y, мультиотображения с R_δ-значениями (напомним, что R_δ-множество есть пересечение убывающей последовательности компактных стягиваемых множеств). Это означает также, что мультиотображения с выпуклыми или стягиваемыми значениями также принадлежат данной совокупности.

Пусть $U \subset E_1$ — открытое ограниченное множество, $X_1, X_2, .., X_{k-1}$ — банаховы пространства.

О п р е д е л е н и е 2. Классом $\widetilde{A}(\overline{U}, X_1)$ называется совокупность полунепрерывных сверху мультиотображений $G : \overline{U} \to K(X_1)$ таких, что для любого конечномерного подпространства $E_n \subset E$ мультиотображение $G|_{\overline{U}_n}$ принадлежит классу $A(\overline{U}_n, X_1)$, где $\overline{U}_n = \overline{U} \cap E_n$.

О п р е д е л е н и е 3. Классом $\widehat{A}(X_{i-1}, X_i)$ назовем совокупность полунепрерывных сверху мультиотображений $G : X_{i-1} \to K(X_i)$ таких, что любое сужение мультиотображения $G|_V$ на V — выпуклое компактное подмножество пространства X_{i-1} принадлежит классу $A(V, X_i)$.

О п р е д е л е н и е 4. Классом $\mathbb{A}^c(\overline{U}, E)$ назовем совокупность мультиотображений $F = F_k \circ ... \circ F_1 : \overline{U} \to K(E)$ вида $F : \overline{U} = X_0 \overset{F_1}{\multimap} X_1 \overset{F_2}{\multimap} X_2 \overset{F_3}{\multimap} ... \overset{F_{k-1}}{\multimap} X_{k-1} \overset{F_k}{\multimap} X_k = E$, где $F_1 \in \widetilde{A}(\overline{U}, X_1)$, а $F_i \in \widehat{A}(X_{i-1}, X_i)$ для $i = 2, .., k$.

Рассмотрим мультиотображение $\mathcal{F} : \overline{U} \to K(E_1)$ вида

$$\mathcal{F}(x) = p(x) + (\phi \circ \pi + k_{p,q}) \circ F(x),$$

где $p : E_1 \to E_1$ — линейный оператор проектирования такой, что $Im\ p = Ker\ l$, $\phi : Coker\ l \to Ker\ l$ — линейный непрерывный изоморфизм, $\pi : E_2 \to E_2/Im\ l$— канонический оператор проектирования, $k_{p,q} : E_2 \to E_1$ — обобщенный обратный к l оператор (см. [1], [2]).

Множество неподвижных точек мультиотображения $\mathcal{F}$ совпадает со множеством решений включения $l(x) \in F(x)$.

О п р е д е л е н и е 5. *Степенью совпадения* $deg(l, F, \overline{U})$ пары (l, F), где $F = F_k \circ ... \circ F_1$ из класса $\mathbb{A}^c(\overline{U}, E_2)$ и не имеет неподвижных точек на $\partial U \cap dom\ l$, назовем топологическую степень $deg(\Phi, \overline{U})$ компактного мультиполя $\Phi = i - \mathcal{F}$, соответствующего мультиотображению $\mathcal{F}$.

Описываются свойства введенной топологической характеристики и рассматриваются приложения к управляемой системе смешанного типа, описываемой дифференциальным включением с импульсными характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mawhin J.L.* Topological degree methods in nonlinear boundary value problems // CBMS Regional Conf. Ser. in Math. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1979. №40. 122 p.
2. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005.
3. *Корнев С.В., Обуховский В.В.* О некоторых вариантах теории топологической степени для невыпуклозначных мультиотображений // Труды математического факультета, 2004. Вып. 8. С. 56–74.

Басова Марина Михайловна
Воронежский государственный ун-т
Россия, Воронеж
e-mail:basova_marina@mail.ru

Поступила в редакцию 10 мая 2007 г.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С УПРАВЛЯЕМЫМ СТАРШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ [1]

© **О. А. Беляева, В. И. Сумин**

В математической теории оптимального управления важную роль играют достаточные условия *сохранения глобальной разрешимости* (СГР) начально-краевых задач при возмущении управления. Достаточно общая схема получения подобных условий была предложена в [1]. В докладе обсуждаются полученные методами [1] условия СГР задачи Коши для полулинейного одномерного волнового уравнения при возмущении зависящего от времени коэффициента при второй производной по пространственной переменной.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №07-01-00495).