УДК 517.977

О РЕКОНСТРУКЦИИ НЕИЗВЕСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В СИСТЕМАХ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ [1]

© М. С. Близорукова

Ключевые слова: реконструкция; вспомогательная управляемая система-модель.

Аннотация: Рассматривается задача устойчивой динамической реконструкции неизвестных характеристик в системах второго порядка. Указывается ориентированный на работу в реальном времени алгоритм, обладающий свойствами динамичности и устойчивости: первое из них означает, что текущие значения приближения входа вырабатываются в «в реальном времени», а второе – что приближение сколь угодно точно при достаточной точности наблюдения.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad (1)$$

$$\dot{x}_2 = -2lp_1x_2 - \omega^2 p_2 x_1 + u(t)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = x_{10}$. Предполагается, что постоянные l и ω известны. На систему действует управление — измеримая по Лебегу функция, удовлетворяющая условию $u(t) \in \in P = [-f, f]$, $t \in T$. Здесь $f = \mathrm{const} \in (0, +\infty)$. Это управление, также как и соответствующее ему решение системы (1), неизвестно. В дискретные, достаточно частые моменты времени $\Delta_h = = \{\tau_{i,h}\}_{h=0}^{m_h}$, $\tau_{i+1,h} = \tau_{i,h} + \delta(h)$, $\tau_{0,h} = t_0$, $\tau_{m_h,h} = \vartheta$ измеряются с ошибкой величины $x(\tau_i)$. Результаты измерений – числа ξ_i^h – удовлетворяют неравенствам

$$|x(\tau_i^h) - \xi_i^h| \leqslant h,$$

где $h \in (0, 1)$ – уровень информационного шума, символ $|a|$ означает модуль числа a. Требуется указать алгоритм, позволяющий восстанавливать (синхронно с развитием процесса) неизвестную скорость изменения координаты $x(t)$ (то есть $\dot{x}(t)$) и неизвестное входное возмущение $u(t)$.

Один из подходов к решению рассматриваемой задачи был развит в работах [1, 2]. В соответствии с этим подходом системе (1) сопоставляется некоторая искусственно смоделированная с помощью компьютера управляемая система M (модель) с фазовой траекторией $w^h(t)$ и управлением $u^h(t)$. Затем указывается правило формирования управления в модели по принципу обратной связи. Это правило выбирается таким образом, что выход $w^h(t)$ или управление $u^h(t)$ модели «приближает» неизвестные величины $\dot{x}(t)$, $u(t)$. Семейство разбиений Δ_h интервала $[t_0, \vartheta]$ предполагаем фиксированным. Итак, задача состоит в следующем.

З а д а ч а. *Требуется указать дифференциальные уравнения модели M*

$$\dot{w}^h(t) = \left\{u_{i1}^h, -p_1u_{i1}^h - p_2\xi_i^h + u_{i2}^h\right\}, \ \text{при} \ t \in \delta_{i,h} = [\tau_{i,h}, \tau_{i+1,h}), \ \ \tau_i = \tau_{i,h}, \qquad (2)$$

$$w^h(t_0) = w_0^h, \ \ w^h(t) \in R^2, \ \ w^h = \{w_1^h, w_2^h\} \in R^2$$

и правило выбора управлений u_i^h в моменты τ_i

$$U : \left\{\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)\right\} \to u_i^h = \left\{u_{i1}^h, u_{i2}^h\right\} \in R^2 \qquad (3)$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 09–01–00378), Программы Президиума РАН «Математическая теория управления» и Урало-Сибирского интеграционного проекта.

такие, что имеют место сходимости

$$\int\limits_{t_0}^{\vartheta} \left| u_1^h(t) - \dot{x}(t) \right|^2 dt \to 0, \quad \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \left| u_2^h(t) - u(t) \right|^2 dt \to 0 \quad \text{\textit{при}} \quad h \to 0. \tag{4}$$

Здесь $u^h(t) = \{u_1^h(t), u_2^h(t)\}$, $u_1^h(t) = u_{i1}^h$, $u_2^h(t) = u_{i2}^h$ при $t \in \delta_{i,h}$.

Пусть известно число $K \in (0, +\infty)$ такое, что каждое решение $(x_u(t), \dot{x}_u(t))$ $(u \in P(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T; R) : u(t) \in P$ для п.в. $t \in T\})$ уравнения (1) удовлетворяет следующим условиям

$$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta} |x_u(t)| \leqslant K, \quad \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta} |\dot{x}_u(t)| \leqslant K. \tag{5}$$

Введем некоторую функцию $\alpha(h) : (0, 1) \to R^+ = \{r \in R : r > 0\}$ со свойствами

$$\alpha(h) \to 0, \;\; \delta(h) \leqslant h, \;\; h^{1/6}/\alpha(h) \to 0 \;\text{ при }\; h \to 0.$$

Пусть начальное состояние модели $w_0^h = (x_0, x_{10})$, а управления в модели находятся по формулам

$$u_{i1}^h = \begin{cases} -\beta_i h^{2/3}, & \text{если } \; |\beta_i| \leqslant K h^{2/3}, \\ -K \operatorname{sign} \beta_i, & \text{если } \; |\beta_i| > K h^{2/3}, \end{cases} \tag{6}$$

$$u_{i2}^h = \begin{cases} -\beta_i^{(1)} \alpha^{-1}(h), & \text{если } \; \left|\beta_i^{(1)}\right| \leqslant \alpha(h) f, \\ -f \operatorname{sign} \beta_i^{(1)}, & \text{если } \; \left|\beta_i^{(1)}\right| > \alpha(h) f. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь число K определено в (5), $\tau_i = \tau_{i,h}$, $\beta_i = w_1^h(\tau_i) - \xi_i^h$, $\beta_i^{(1)} = w_2^h(\tau_i) - u_{i1}^h$.

Опишем процесс решения рассматриваемой задачи. Работа алгоритма начинается в момент t_0 и разбивается на $m_h - 1$ идентичных шагов. До момента t_0 фиксируются — величина $h \in (0, 1)$, функция $\alpha = \alpha(h)$, разбиение $\Delta = \Delta_h$ и модель (2). Затем организуется процесс управления по принципу обратной связи моделью M синхронно с развитием процесса функционирования системы (1). Во время i-го шага на промежутке времени $\delta_{i,h} = [\tau_{i,h}, \tau_{i+1,h})$ происходит следующее. Сначала вычисляется управление в модели $u^h(\tau_{i,h})$ по формулам (6), (7). После этого пересчитывается фазовое состояние модели: к ранее известному отрезку траектории $w^h(t)$, $t \in [t_0, \tau_i]$ добавляется отрезок, полученный на временном интервале $(\tau_i, \tau_{i+1}]$. На следующем шаге все операции повторяются. Алгоритм заканчивает работу в момент ϑ.

Сходимость алгоритма устанавливается в следующей теореме.

Т е о р е м а. *Если уравнения модели выбраны в виде* (2)*, закон управления — в виде* (3), (6), (7)*, то имеют место сходимости* (4).

Описанный выше алгоритм легко модифицируется для некоторых классов систем обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. Basel, Gordon and Breach, 1995.

2. *Maksimov V.I.* Dynamical inverse problems of distributed systems. VSP, Boston, 2002.

Abstract: The problem of stability of unknown characteristics dynamic reconstruction in systems of second order; the focused at real-time work algorithm, possessing dynamic and stability properties: the first means, that present input values produce "in real-time", the second – that approximation is such precise as precise the supervision.

Key words: reconstruction; an auxiliary dynamical system-model.

Близорукова Марина Сергеевна
к. ф.-м. н., доцент
Институт математики и механики
УрО РАН
Россия, Екатеринбург
e-mail: msb@imm.uran.ru

Marina Blizorukova
candidate of phys.-math. sciences,
senior lecturer
Institute of Mathematics and Mechanics
of UrD RAS
Russia, Ekaterinburg
e-mail: msb@imm.uran.ru

УДК 517.977

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО ОБОБЩЕНИЯ НЕРАВЕНСТВА ВИРТИНГЕРА ВАРИАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ [1]

© **Г. П. Бочкарёв**

Ключевые слова: интегральное неравенство; оператор; W-подстановка; квадратично суммируемая функция; сопряжённый оператор; собственное значение; спектральный радиус.

Аннотация: На примере неравенства Виртингера рассматривается применение методов, разработанных Пермским семинаром по ФДУ, к доказательству интегральных неравенств.

При исследовании неравенства Виртингера [2, с. 245]

$$\int_0^\pi x^2(t)dt \leqslant \int_0^\pi \dot{x}^2(t)dt, \int_0^\pi x(t)dt = 0 \tag{1}$$

удобно рассмотреть вариационную задачу в $H^1 = H^1[a,b]$, пространстве функций, чья вторая производная принадлежит пространству $L_2 = L_2[a,b]$, квадратично суммируемых функций:

$$\Phi x = \int_a^b \Big(\dot{x}^2(t) - p(t)x^2(t)\Big)dt \to \min, \int_a^b x(t)dt = 0. \tag{2}$$

Если эта задача имеет решение, то значение минимума функционала равно 0.

Обозначим через $D = D[a,b] = \Big\{x \in H^1[a,b] \ \mid \int_a^b x(t)dt = 0\Big\}$, $AC = AC[a,b]$ - пространство абсолютно непрерывных функций. Следуя подходу, разработанному Пермским семинаром [1], сведём рассматриваемую проблему к задаче в $L_2[a,b]$ с помощью подстановки, определяющей взаимно однозначное соответствие между пространствами D и L_2 ($x \in D, z \in L_2$):

$$\dot{x}(t) = z(t), \int_a^b x(t)dt = 0, \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07-01-96060.