УДК 378.147

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ: МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ СВЯЗИ, МОДЕЛИ СОДЕРЖАНИЯ, МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ЛИНИИ

© Ф.Н. Богатырев

Bogatyrev F.N. Algebraic component of the professional mathematical education: inter-disciplinary connections, content models, methodological lines. The article discusses such theoretical and practical problems of the modern professional mathematical education in the cycle of algebraic disciplines as: 1) folding and structuring of the information concerning the basic methods of scientific research; 2) the integrated disciplines substantiation and elaboration at the stage of studying the basic courses and specialization disciplines; 3) development of the didactic modules connected to formation of the new structures in a mathematical knowledge system.

Рассмотрены следующие вопросы профессионального математического образования в цикле алгебраических дисциплин: 1) свертывание и структурирование информации относительно фундаментальных методов научных исследований; 2) обоснование и разработка интегрирующих дисциплин на этапе изучения базовых курсов и дисциплин специализации; 3) разработка дидактических модулей, связанных со становлением новых структур в системе математического знания.

1. Организация содержания на основе фундаментальных теоретических методов. В современной математике – объем информации удваивается за пятилетие [19]. Гигантские теоремы (М. Атья – И. Зингера об индексах, классификация простых групп и др.) интегрируют громадный объем знаний. Сжатие информации для ее анализа, включение в исследование современных методов, перевод ключевой информации на новый язык – актуальные задачи для науки и образования [24]. За два часа студенты знакомятся с теоремой о биквадратичном вычете, которую великий К. Гаусс разрабатывал семь лет. Результаты П.С. Новикова о неразрешимости классических алгоритмических проблем в теории групп, связанные с методом проходных букв, привели к многостраничным примерам, где указанные проблемы – неразрешимы [16, 17]. Позднее проблема была переведена на язык изложения, вполне годный и для образовательных курсов [12, 14]. Возникает проблема усвоения понятий вокруг больших масс знаний, когда, из-за большого объема свернутой информации, разрыв даже между соседними утверждениями остается значительным (при любом дроблении цепи доказательства). Можно подойти к решению этой проблемы (в научных исследованиях и обучении) введением фундаментальных методов, вокруг которых происходит интеграция знания. В массовой образовательной практике (особенно – при практически направленном обучении), часто, в учебном процессе, изложение информации не доходит до применения современных научных методов.

Содержание курсов должно строиться на базе фундаментальных структур, изучаемых в содержательных интерпретациях. Булевы алгебры логики, множеств и случайных событий закладывают фундамент под большинство методов исследования алгебраических структур. Алгебра логики: основа аксиоматического метода, рассуждений и доказательств. Это база для формальной и общей логики, построения логических цепей обоснований [1]. Алгебра множеств и отношений: применяется в задачах принятия решений (в том числе и в условиях неопределенности). Теория комплектов, допускающая повторяемость элементов, связана с задачами построения баз данных и формальных языков. Множества, нечеткие множества и комплекты выражаются в вероятностных интерпретациях, что связано с алгеброй случайных событий – основы теории вероятностей и математической статистики. Связывающая и обслуживающая все эти алгебры – матричная алгебра. Ее применение в ключевых задачах: 1) разложение булевых функций в многочлены Жегалкина сводится к решению систем над конечными полями Галуа (*в математической логике*); 2) нахождение представлений отношений с решеточно-определенными операциями матричной алгебры (*в теориях множеств, отношений, принятия решений*); 3) решение системы нормальных уравнений методом наименьших квадратов (в задачах *математической статистики* – построение регрессионной зависимости между данными величинами).

Изучение и интерпретации матричных алгебр – центральный момент в пропедевтике раздела «Линейная алгебра». Важнейшее место занимают разделы, связанные с теорией n-мерных векторов, матриц, систем линейных уравнений. Обучающиеся испытывают в их усвоении серьезные трудности. Традиционные методы не позволяют хорошо классифицировать задачи, связанные с нахождением ранговых соотношений, анализом композиций невырожденных и вырожденных матриц. Затруднен поиск конструктивных алгоритмов. Этих проблем можно, в определенной мере, избежать, если излагать указанные разделы на основе критерия замещения – теоретической основы симплекс-метода (метода оптимального улучшения найденных допустимых решений) (Данциг, 1940 г.) [25].

Т е о р е м а 1. Даны две системы векторов

$$b_1, b_2, \dots, b_n; \qquad (1.1)$$

$$a_1, a_2, \dots, a_m. \qquad (1.2)$$

Система (1.1) линейно выражается через систему (1.2):

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} \tau_{ij} a_i; (j = 1, 2, \dots, n) \qquad (1.3)$$

Если $\tau_{rs} \neq 0$, тогда найдется система векторов

$$a_1, \dots, a_{r-1}, b_s, a_{r+1}, \dots, a_m, \qquad (1.4)$$

что:

1. Система (1.1) линейно выражается через систему (1.4). При этом

$$b_j = \sum_{i \neq r}^{m} \tau'_{ij} a_i + \tau'_{rj} b_s; (j = 1,2,\dots,n); \qquad (1.5)$$

$$\tau'_{ij} = \tau_{ij} - \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} \tau_{rj} \ (\text{если } i \neq r); \qquad (1.6)$$

$$\tau'_{rj} = \frac{\tau_{rj}}{\tau_{rs}}. \qquad (1.7)$$

2. Система (1.2) подобна системе (1.4), т. е. (1.2) преобразуется в (1.4) элементарными преобразованиями.

3. Если система (1.2) – линейно независимая, тогда и система (1.4) – линейно независимая.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\tau_{rs} \neq 0$, из равенства

$$b_s = \tau_{ls} a_1 + \dots + \tau_{r-ls} a_{r-1} + \tau_{rs} a_r + $$
$$+ \tau_{r+ls} a_{r+1} + \dots + \tau_{ms} a_m$$

имеем

$$a_r = -\frac{\tau_{ls}}{\tau_{rs}} a_1 - \dots - \frac{\tau_{r+ls}}{\tau_{rs}} a_{r-1} + \frac{1}{\tau_{rs}} b_s -$$
$$- \frac{\tau_{r+ls}}{\tau_{rs}} a_{r+1} - \dots - \frac{\tau_{ms}}{\tau_{rs}} a_m = \sum_{i \neq r} \left(-\frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} \right) a_i + \frac{1}{\tau_{rs}} b_s \qquad (1.8)$$

Из (1.1) и (1.8) получаем:

$$b_j = \sum_{i \neq r} \tau_{ij} a_i + \sum_{i \neq r} \left(-\frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} \right) \tau_{rj} a_i + \frac{\tau_{rj}}{\tau_{rs}} b_s =$$
$$= \sum_{i \neq r} \left(\tau_{ij} - \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} \tau_{rj} \right) a_i + \frac{\tau_{rj}}{\tau_{rs}} b_s.$$

Значит: $b_j = \sum_{i \neq r} \tau'_{ij} a_i + \tau'_{rj} b_s; (j = 1,2,\dots,n)$. Здесь:

$$\tau'_{ij} = \tau_{ij} - \frac{\tau_{is}}{\tau_{rs}} \tau_{rj} \ (i \neq r); \ \tau'_{rj} = \frac{\tau_{rj}}{\tau_{rs}}.$$

Умножим в (1.2) a_r на $\tau_{rs} \neq 0$. Имеем: $a_1, a_2, \dots, \tau_{rs} a_r, \dots, a_m$.

Прибавим к вектору $\tau_{rs} a_r$ остальные векторы a_k (из этой системы), умноженные на τ'_{rk}; $(k = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, m)$. Учитывая (1.3) – получаем систему (1.4), полученную из (1.2) с помощью элементарных преобразований.

Пусть (1.2) – линейно зависимая, тогда найдутся $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_m, \mu_s$ (не все равные нулю), что

$$\sum_{i \neq r} \lambda_i a_i + \mu_s b_s = \bar{0}. \qquad (1.9)$$

Из (1.3) (при $j = s$) имеем $\sum_{i \neq r} \lambda_i a_i + \mu_s \sum_{i=1}^{m} \tau_{is} a_i = \bar{0}$.

Значит: $\sum_{i \neq r} (\lambda_i + \mu_s \tau_{is}) a_i + \mu_s \tau_{rs} a_r = \bar{0}$.

Так как система (1.2) – линейно независимая, имеем $\lambda_i + \mu_s \tau_{rs} = 0$. Значит: $\mu_s = 0$; $\lambda_i = 0$; $(i = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, m)$. Система (1.4) – линейно независимая. ▲

Рассмотрим формулы (1.5), (1.6) и (1.7). Они позволяют указать эффективный метод нахождения линейной выраженности каждого вектора из (1.1) через систему (1.4), если известно, как каждый вектор из (1.1) линейно выражается через (1.2). Имеем:

		$b_1 \dots b_j \dots b_n$	
$T=$	a_1	$\tau_{11} \dots \tau_{1j} \dots \tau_{1n}$	
	…	…………………	
	a_i	$\tau_{i1} \dots \tau_{ij} \dots \tau_{in}$	– i-я строка
	…	…………………	
	a_m	$\tau_{m1} \dots \tau_{mj} \dots \tau_{mn}$	

T – таблица векторов системы (1.1) по отношению к векторам системы (1.2).

Имеем:

		$b_1 \dots b_s \dots b_n$	
$T'=$	a_1	$\tau'_{11} \ \dots \ 0 \ \dots \ \tau'_{1n}$	
	…	………………	
	b_s	$\tau'_{r1} \ \dots \ 1 \ \dots \ \tau'_{rn}$	– r-я строка
	…	………………	
	a_m	$\tau'_{m1} \ \dots \ 0 \ \dots \ \tau'_{m1}$	

T' – таблица векторов системы (1.1) по отношению к векторам системы (1.4).

Если $\tau_{rs} \neq 0$, тогда система (1.4) получается из системы (1.2) заменой вектора a_r на вектор b_s. Эта операция может быть объяснена с помощью перехода от таблицы T к T'. Согласно (1.6) и (1.7), таблица T' получается из T следующим образом.

1. Надо: в T, r-ю строку, умноженную на некоторые скаляры, прибавить к остальным строкам T, чтобы получились нули в s-ом столбце.

2. Далее: r-ю строку умножим на скаляр $\frac{1}{\tau_{rs}}$.

Т е о р е м а 2. Пусть система (1.1) линейно выражается через (1.2). Тогда для каждой линейно независимой системы

$$b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ik}, \qquad (2.1)$$

подсистемы системы (1.1), существует в (1.2) подсистема из k векторов, которую можно заместить системой (2.1).

Полученная система векторов обладает свойствами:

1. Через нее линейно выражается каждый вектор системы (1.1).

2. Она подобна системе (1.2).

3. Если система (1.2) – линейно независимая, тогда полученная система тоже линейно независимая.

Доказательство. Используем метод математической индукции по k.

1. Если $k = 1$, тогда справедливость следует из теоремы 1.

2. Пусть для всех l: $1 < l \le k - 1$ теорема верна.

3. Докажем её истинность для $l = k$.

По допущению, в (1.2) существует подсистема из $k - 1$ вектора, которую можно заменить линейно независимой подсистемой $b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{i\,k-1}$. Пусть это будет $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ из (1.2). По индуктивному утверждению, система

$$b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{i\,k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m \tag{2.2}$$

обладает свойствами 1, 2, 3. В частности: из свойства 1 имеем

$$\begin{aligned} b_{ik} &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_{ik-1} b_{ik-1} + \\ &+ \lambda_k a_k + \ldots + \lambda_m a_m \end{aligned} \tag{2.3}$$

Среди чисел $\lambda_k, \lambda_{k+1}, \lambda_m$ – не все равны нулю. Иначе (при $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_m = 0$) следовало бы из (2.3): $b_{ik} = \lambda_1 b_{i1} + \ldots + \lambda_{k-1} b_{i\,k-1}$. Значит (2.1) – линейно зависимая. Пусть $\lambda_k \ne 0$. Тогда, по теореме 1 и (2.3), имеем систему

$$b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{i\,k-1}, b_{ik}, a_{k+1}, \ldots, a_m, \tag{2.4}$$

которая обладает свойством 1 и подобна системе (2.2), она подобна и системе (2.2). Если система (2.2) – линейно независимая, тогда и система (2.4) – линейно независимая. ▲

Следствие 1. Из теоремы 2 следует: $k \le m$.

Следствие 2. Если каждый вектор из системы (1.1) линейно выражается через систему (1.2) и $m < n$, тогда система (1.1) – линейно зависимая.

Следствие 3. Каждая система линейно независимых n-мерных векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ подобна системе n-мерных единичных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Следствие 4. Систему (2.4) можно получить, используя k раз теорему 1. Это дает возможность воспользоваться правилом замещения для получения системы (2.4), удовлетворяющей условиям 1, 2, 3.

Следствие 5. В матрице ее строчный ранг равен столбцовому рангу.

Доказательство. Пусть в матрице A_{mn} столбцовый ранг равен r и

$$a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_r} \tag{3.1}$$

базис системы столбцов.

Запишем таблицу T для столбцов A_{mn} относительно векторов

$$e^1, e^2, \ldots, e^m \tag{3.2}$$

		$a^1\, a^2 \ldots a^{i_1}\;\; a^{i_2} \ldots a^{i_r} \ldots a^n$
$T=$	e^1	$\alpha_{11}\, \alpha_{12} \ldots \alpha_{1i_1}\; \alpha_{1i_2} \ldots \alpha_{1i_r} \ldots \alpha_{1n}$
	e^2	$\alpha_{21}\, \alpha_{22} \ldots \alpha_{2i_1}\; \alpha_{2i_2} \ldots \alpha_{2i_r} \ldots \alpha_{2n}$
	…	………………………………
	e^m	$\alpha_{m1}\, \alpha_{m2} \ldots \alpha_{mi_1}\; \alpha_{mi_2} \ldots \alpha_{mi_r} \ldots \alpha_{mn}$

По теореме 2: в системе (3.2) существует r векторов, которые могут быть заменены системой (3.1). Пусть это будут векторы $e^1, e^2, \ldots, e^r$.

Согласно следствия 4, от таблицы T переходим к T'

		$a^1\, a^2 \ldots a^{i_1}\;\; a^{i_2} \ldots a^{i_r} \ldots a^n$
$T'=$	a^{i_1}	$\beta_{11}\;\; \beta_{12} \ldots 1 \ldots 0 \ldots 0 \ldots \beta_{1n}$
	a^{i_2}	$\beta_{21}\;\; \beta_{22} \ldots 0 \ldots 1 \ldots 0 \ldots \beta_{2n}$
	…	………………………………
	a^{i_r}	$\beta_{r1}\;\; \beta_{r2} \ldots 0 \ldots 0 \ldots 1 \ldots \beta_{rn}$
	e^{r+1}	$0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0$
	…	………………………………
	e^m	$0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0$

1. Если $m > r$, тогда все элементы строк, с номерами большими r, будут равны нулям. Если бы, скажем, $\beta_{r+1\,k} \ne 0$, тогда, согласно теореме 1, вектор e^{r+1} можно заместить вектором a^k. Тогда: система $a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_r}, a^k$ – линейно независимая, что невозможно.

2. Если бы в первом столбце векторы системы (3.1) были бы расположены в другом порядке, тогда можно прийти к исходному расположению этих векторов элементарными преобразованиями строк.

В T' первые r строк – линейно независимые. Значит строчный ранг T' равен r. Так как от T к T' перешли с помощью элементарных преобразований строк, их строчные ранги равны. ▲

В итоге имеем большинство выводов и результатов в виде конструктивных следствий. Интерпретация учебного курса на основе критерия замещения дает возможность объединить эффективность двойственных категориальных подходов: 1) *свертывания информации* – принципиальной возможности найти комплексный подход к доказательству большинства обобщающих утверждений; 2) *развертывания информации* – принципиальной возможности получить решение конкретных частных задач. Исследовались, по данным направлениям, содержание теоретической части и практических компонентов курса «Линейная алгебра» всех направлений и специальностей математического образования. Все интерпретации содержания теоретической и практической компоненты учебного курса обобщались интегрированным подходом на основе указанного оптимизированного метода линейного программирования. *Варианты решаемых образовательных проблем (конкретных этапов обучения)*: 1) отработка методов доказательства утверждений теории; 2) описание алгоритмов и конструктивных процедур в задачах курса «Линейная алгебра»; 3) эффективная машинная реализация найденных алгоритмов во втором концентре алгебраического образования или его прикладных разделах. Указанный подход реализован для различных профилей обучения: дидактическая адаптация проводилась на физико-математическом факультете ЛГПУ около 20 лет. *Организационные аспекты*: 1) излагается традиционный вариант интерпретации учебного курса; 2) параллельно все желающие могут (в режиме сравнения) следить за изложением курса на основе критерия замещения (теоретическая и практическая части интерпретаций – согласованы) по бумажному или электронному источникам; 3) если в процессе обучения вся группа переходит на изучение модернизированной интерпретации, этот вариант становится основным. Объем изучаемого курса – примерно 30–40 % семестрового объема курсов «Алгебра», «Геометрия и алгебра» в 1–2 семестрах. По организации содержания и структуре учебного материала – это *укрупненная дидактическая единица*, блок группы родственных знаний. Разработка используется в обучении студентов России, СНГ, дальнего зарубежья (Монголия, Камбоджа, Вьетнам).

2. Основные компоненты учебных моделей дисциплин алгебраического профиля (второго концентра обучения). Обоснование и интерпретирование содержания проводится на основе: 1) взаимодействия фундаментальных и прикладных аспектов знания; 2) реализации междисциплинарных направлений научных исследований. Абсолютных оценочных параметров для дифференциации по указанным категориям – нет: всегда присутствует субъективный фактор и мера условности. В любом случае: базовые образовательные курсы (по набору текущей информации, методов и структурных идей) должны быть необходимой основой для изучения последующих дисциплин. Курс «Геометрия и алгебра», изучаемый в I–IV семестрах (357 часов) (по специальности «01.02.00 – Прикладная математика»), играет ту же роль, что и объединенный курс «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» (для обучающихся по специальности «01.01.00 – Математика»). Изучение других курсов по геометрии и алгебре – стандартами обучения не предусмотрено. *Аргументация*: 1) алгебраические методы присутствуют в других образовательных курсах (дискретная математика); 2) методы дифференциальной геометрии и топологии не имеют прямых выходов в теорию информационных систем. Со вторым аргументом можно было бы согласиться четверть века назад. За это время: а) теория автоматов, из сферы лишь дискретных систем, вошла в область систем, функционирующих в непрерывном времени (топологических автоматов); б) теория распространилась и на гладкие динамические системы (с богатой качественной теорией дифференциальных уравнений).

Нельзя говорить о полновесной реализации *принципа функциональной полноты содержания* курса «Геометрия и алгебра» для решения следующих задач: 1) обеспечения глубокого усвоения дисциплин специализации (в лучшем случае – возможно изложение в рамках реализации стандарта, задающего локально-минимальный необходимый объем информации и методов); 2) обеспечения необходимых (даже минимальных) возможностей для реализации послевузовского обучения научной специальности «01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел». Вне программы остаются классические структурные алгебраические теории и теория чисел. Каким образом можно качественно изложить теорию кодирования без развернутой теории конечных полей [10, 11]? В дисциплинах специализации, с необходимостью, требуются дополнительные курсы.

Обоснования по отбору содержания.

1. Необходимо отражение системы знаний, интегрирующей основные *классические* (алгебраические структуры, универсальные алгебры, разрешимость и теория Галуа) и *неклассические* (алгебраическая логика, моделирование структур в базах данных, теория Галуа баз данных) разделы.

2. Содержание согласовано с программой кандидатского экзамена по специальности «01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел».

3. Осознается факт: при любом выборе информация остается неполной.

Программа второго концентра системы алгебраических знаний.

1. Алгебраическая теория полугрупп: полугруппы, конгруэнции, гомоморфизмы, циклические, максимальные, инверсные полугруппы, идеалы, максимальные идеалы, простые полугруппы, комбинаторное задание полугрупп, свободные полугруппы, изоморфное вложение полугрупп в группы.

2. Теория групп: классические группы, действие группы на множестве, гомоморфизмы, нормальные делители, фактор-группы, комбинаторное задание групп, алгоритмические проблемы в теории групп, конечнопорожденные абелевы группы, свободные абелевы группы, прямые суммы абелевых групп.

3. Теория колец: гомоморфизмы, идеалы колец, фактор-кольца, простые и максимальные идеалы, радикалы колец, кольца главных идеалов, факториальные и эвклидовы кольца, прямые произведения колец.

4. Теория полей: поля конечной размерности, конечные поля, разрешимость уравнений в радикалах, элементы теории Галуа.

5. Конечномерные ассоциативные и альтернативные линейные алгебры с делением.

6. Универсальная алгебра: структура подалгебр, модели, многообразия, фактор-алгебры, свободные алгебры, прямые произведения алгебр, алгоритмические алгебры, модифицированные алгебры Поста.

7. Алгебраическая логика: булевы алгебры и исчисление высказываний, алгебры Халмоша и узкое исчисление предикатов.

8. Реляционные алгебры в многообразии универсальных алгебр.

9. Теория Галуа в категории отношений: соответствия Галуа, как связь между логическими теориями и их алгебраическими моделями.

Основные базисные единицы теоретической части: 1) алгебраические структуры [1–5]; 2) алгебраическая логика [6–8]; 3) моделирование семантики в базах данных [6–9].

Информационная основа: классические монографии, которые общепризнанны среди ученых-математиков, теоретиков и практиков образования.

Модели приложений теории.

Алгебраические теории автоматов и эффективных вычислений [2]: 1) динамические системы типа «вход – состояние – выход» – основа для подхода к изучению реальных объектов; 2) их движения – параметрические семейства преобразований пространства объектов в себя (зависящие от входных данных);

3) движения однозначно согласуются с входными данными, когда упомянутое семейство – полугруппа относительно композиции преобразований; 4) исследование закономерностей функционирования дискретных систем – сводится к изучению полугрупп, индуцированных конечными автоматами (теоретический аппарат – алгебраическая теория полугрупп [9]); 5) эффективная вычислительная процедура, как преобразование пространства объектов; 6) модельные интерпретации – нейронные сети, конечные автоматы, машины Тьюринга, рекурсивные

Прикладные вопросы теории алгебраических структур (*в теории кодирования*) [3, 4, 10]: 1) линейные коды – как подпространства над конечным полем с фиксированным базисом; 2) коды инвариантные относительно группы подстановок базисных векторов; 3) полиномиальные коды; 4) конечные абелевы группы – как источник кодирующих множеств; 5) алгебраические структуры в моделях кодирующих и декодирующих систем.

Языки. Программирование. Моделирование семантики в базах данных [6, 23]: 1) классификация формальных языков, разработка методов синтаксического анализа (*математическая лингвистика*); 2) методы формализации синтаксиса и семантики языков программирования, алгебры контекстно-свободных языков (*теория программирования*); 3) проблемы тождественных преобразований в системах алгоритмических алгебр, многоосновные алгоритмические алгебры (*теория алгоритмов*); 4) проблемы автоматизации проектирования и программирования ЭВМ (в классах универсальных алгебр) (*теория ЭВМ*); 5) свойства структуры подалгебр универсальной алгебры и проблема полноты для модифицированных алгебр Поста (*теория баз данных*); 6) соответствия Галуа в общей теории отношений – отражение *связи между логическими теориями и их аксиоматическими моделями*.

Итоговый результат. В рассмотренных формальных системах (с конечным числом правил вывода) алгоритмически разрешима проблема выводимости; теорема о полноте, в данном случае, теорема о равенстве операторов семантического и логического замыканий.

Модели междисциплинарных курсов.

Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных [18]:

1) объекты – конструктивные алгоритмические алгебры и их модели; 2) интерпретации – модели баз данных (в связи с возможностями программирования в них); 3) структурный признак объектов – их связь с алгебраической логикой (объекты функционируют вместе с логическими исчислениями); 4) модельные классы – булевы алгебры и исчисление высказываний (цилиндрические и полиадрические алгебры (алгебры Халмоша) и исчисление предикатов первой степени. 5) семантический аппарат – теория категорий.

Общая алгебра [20, 21, 24], *алгебраические системы* [15]: 1) объекты – универсальные алгебры, универсальные языки, формальные грамматики; 2) логический аппарат – язык исчисления предикатов; 3) связь между логическими теориями и их алгебраическими моделями – определяется соответствиями Галуа.

Алгебра, логика, информатика [23]: 1) проблемы тождественных преобразований в системах алгоритмических алгебр и классификации формальных языков – исследуются аппаратом теории множеств и отношений; 2) описание алгоритмических алгебр – исследуются аппаратом многоосновных алгебр (в частности, математическая теория автоматов – теория двух- и трехосновных алгебраических систем).

Основные модельные структуры: 1) машина Тьюринга; 2) автоматы Мура и Миля; 3) многоосновные алгебраические системы.

Дидактические особенности: 1) элементы высокой абстракции и формализации – готовятся к дидактической интерпретации анализом с точки зрения общих алгебраических концепций – изучение структур приводит к реестру формул, связанных с законами композиции; 2) проявляющиеся структуры (группоид, полугруппа, моноид, группа, кольцо, поле, тело, линейная алгебра, модуль, квазигруппа, решетка, булева алгебра, категория, универсальная алгебра, модель) – следствие классификации по типу их сигнатур; 3) задача обучающихся – распознать алгебру при сопоставлении (сопряженных и двойственных) известных понятий (например, симметрия – группа, линеаризация – линейный оператор, конечный автомат – трехосновная алгебраическая система, кодирование – поле конечной характеристики); 4) возможно индуцирование алгебраической структуры при кодировании (внесение ее в информационный массив извне), хотя множество данных, передающихся по каналу информации, такой структурой не является.

Направление междисциплинарной организации учебных и научных дисциплин – одно из основных в образовательной и научной практике. Многие классические разделы системы математического знания, развиваясь в течение последнего столетия, подошли к этапу обобщенного синтеза знаний. Главное направление их развития – фундаментальные приложения, обоснование методов и понятий современной математики (связанной с изучением интеллектуальных систем).

3. Основные компоненты учебной модели «Упорядоченные структуры в базовых курсах и дисциплинах специализации математического образования». Становление теории порядковых структур происходило позднее, чем алгебраических и топологических (ближе к середине XX в.) [22, 26, 27]. Сравнение объектов по величине формализуется в понятиях: отношение порядка, упорядоченное множество.

Метод исследования: реализация порядкового подхода (изучение порядковой структуры объекта).

В единую область знания оформилась теория частично упорядоченных систем. В разработке теории структур оформился теоретико-решёточный способ исследования (сопряженный с соответствующей операторной структурой мышления) – изучение объекта с помощью решётки его подмножеств.

Приложения: 1) в логике (описание пропозициональных исчислений, как брауэровых решеток); 2) геометрии; 3) теории групп; 4) общей алгебре (теоретико-решеточные методы в полиадрических алгебрах); 5) функциональном анализе; 6) теории вероятностей (классификация наблюдаемых квантово-механических свойств, как полных атомно порожденных решеток – изоморфных решетке всех замкнутых подпространств гильбертова пространства), 7) математической физике (описание моделей детерминистских динамических систем, как топологических решеток) [5, 7].

Упорядоченные алгебраические структуры возникают там, где согласованы с отношением порядка алгебраические операции. Если алгебраические системы наделены топологиями, в которых их алгебраические операции непрерывны, имеем топологические упорядоченные алгебраические системы.

Возникающие задачи: 1) обосновать возможность продолжения топологии на расширения систем; 2) исследовать формы задания топологии.

В базовые дисциплины входят лишь фрагменты теории упорядоченных систем. Систематическое их изучение проводится только для специализирующихся в этой области (программы по направлению «51.01.00» и специальности «01.01.00 – Математика»). В образовательном стандарте (по специальности «03.21.00 – Учитель математики») предусмотрено изучение:

1) понятия отношения порядка, свойств упорядоченных множеств (в курсе «Введение в математику»); 2) свойств и строения упорядоченных числовых структур – линейно упорядоченных полуколец, колец и полей (в курсе «Числовые системы»). Раскрыть этим содержание алгебраических структур в правой части рис. 1 – невозможно, это направление выпадает из системы профессиональных знаний учителя математики.

Цель обучения: обеспечить возможность доведения изложения до нетривиальных теорем в упорядоченных структурах.

Базовый материал: теория булевых алгебр, вместе с теоремой Стоуна о строении конечных булевых алгебр (как изоморфных решетке всех подмножеств некоторого конечного множества).

Основные порядковые понятия: 1) виды элементов упорядоченных множеств; 2) точные грани; 3) линейно упорядоченное множество (цепь) и сечение; 4) вполне упорядоченное множество; 5) решётка; 6) дистрибутивность; 7) атом; 8) булева решётка; 9) упорядоченная группа, кольцо, поле.

Модельные примеры: 1) поле R; 2) $\beta(M)$ – булеан множества M (по включению); 3) решётка N (с отношением делимости).

Точные грани элементов в рассмотренных модельных примерах: 1) наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное; 2) минимум и максимум, 3) объединение и пересечение.

Теоретический материал: 1) свойства различных упорядоченных структур; 2) принцип двойственности; 3) эквивалентность порядкового и алгебраического определений решётки; 4) теорема Стоуна; 5) теорема Тарского (о неподвижной точке); 6) лемма Кенига; 7) лемма Цорна; 8) теоремы Цермелло и Гельдера; 9) характеристика $\beta(M)$, как полной атомной булевой решетки; 10) структурные свойства основных числовых систем.

Принципиальные теоретические результаты. Являются изоморфными: 1) категория конечных упорядоченных множеств (с изотонными отображениями в качестве морфизмов); 2) конечные дистрибутивные решётки (с их гомоморфизмами, которые сохраняют наибольший и наименьший элементы); 3) конечные T_0 пространства (с непрерывными отображениями).

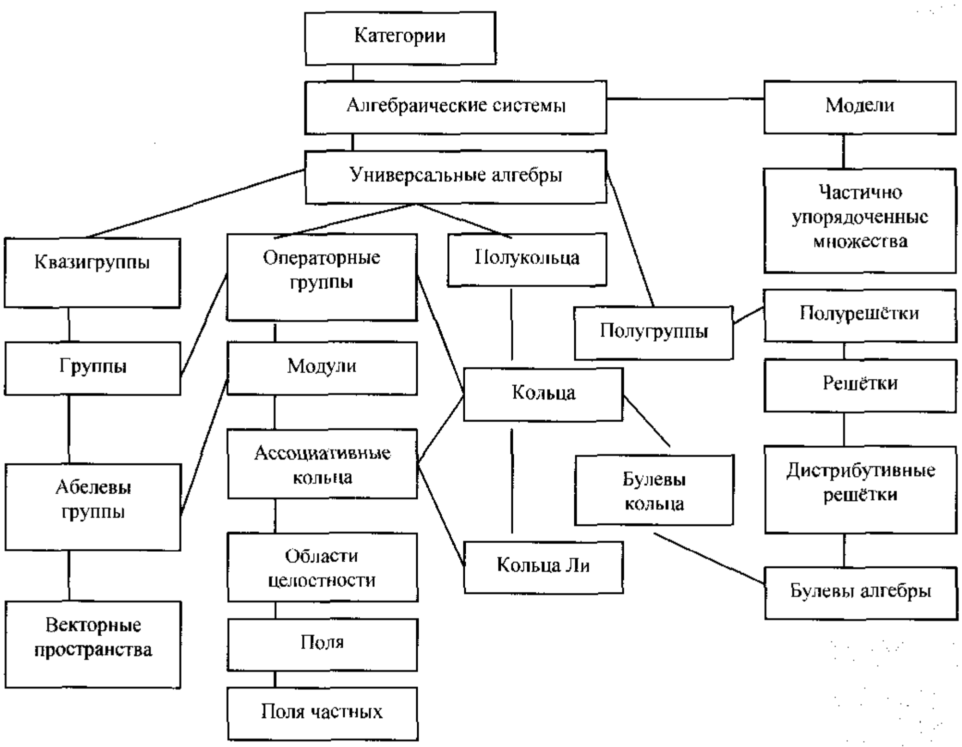

Рис. 1. Основные алгебраические структуры

Этот факт (хотя бы в конечной математике) устанавливает тесную связь порядковых, алгебраических и топологических структур – свидетельство единства современной математики. При его доказательстве и обоснованиях выводов – используем *связи между морфизмами в указанных структурах*: 1) инъективный гомоморфизм, между алгебраическим структурами, является изоморфизмом, обратный изоморфизм – тоже сохраняет операции; 2) для изотонных отображений упорядоченных множеств (и для непрерывных отображений топологических пространств) – это неверно, но изотонные биективные отображения цепей (или конечных упорядоченных множеств) – порядковые изоморфизмы; 3) изотонное отображение между решётками – не всегда гомоморфизм, но все непустые подмножества упорядоченных множеств – сами являются упорядоченными подмножествами относительно индуцированного порядка (что неверно для алгебраических структур).

Необходимые умения: представление упорядоченных множеств диаграммами Хассе (в задачах дискретной математики и прикладной алгебры).

Межпредметные связи и интегрирующие подходы: 1) техника и методология индуктивных рассуждений имеет основой порядковые структуры; 2) принципы комбинаторных методов связаны «деревом» перебора, поиском оптимизированных правил поиска, имеющими порядковый характер; 3) обосновывается интуитивный поиск решений задач линейного программирования (содержательный выбор решений на многоугольнике или многограннике решений – выделением систем эквипотенциальных уровней прямыми на плоскости и плоскостями в пространстве); 4) в элементарной математике порядковый подход реализуется в теме «Неравенства» (обобщаются на случай бесконечного количества аргументов неравенства Коши, Буняковского, Минковского, Гельдера, Йенсена; они сохраняются при предельном переходе).

Возможные пути обучения: 1) профильная дифференциация в системе алгебраических и топологических знаний; 2) курсы специализации по профилю «Дидактика математики», относящихся к подготовке учителей для специализированных школ; 3) в планах работы ведущих вузов (МПГУ, РПГУ) реализуются подходы с направленностью «Элементарная математика с точки зрения высшей» [8]; вариант интерпретации предлагается в [13].

4. **Выводы.** Значимая компонента современной образовательной парадигмы всегда присутствовала в системе математического образования: допускался вариативный подход к программам, которые связывались с авторитетными научными и образовательными школами. В системе алгебраических знаний: а) «Московский» вариант А.И. Кострикина и Л.Я. Куликова (более соотнесенный с европейской системой образования); б) «Ленинградский» вариант Д.К. Фаддеева и Е.С. Ляпина (соотнесенный с классической системой отечественного образования), строится на базе арифметической культуры. Естественная составляющая планирования содержания – отражение направлений научной специализации алгебраических кафедр МГУ, МПГУ и СПбГУ, РПГУ, как ведущих кафедр этого профиля в вузах. В программы заложен принцип описания изоморфных расширений классических структур. Курс первого уровня заканчивается классификацией алгебраических расширений полей. Программа второго концентра алгебраического образования не носит обязательного характера, как при изучении базовых курсов; относится больше к дисциплинам специализации. Даже в условиях механико-математического факультета МГУ: теория Галуа (классика алгебраических знаний) отошла в область спецкурсов. Выбор материала определялся принципом рациональной фундаментальности: излишнее углубление в вопросы, не имеющие достаточно ясной связи с материалом, который непосредственно потребуется будущему специалисту, не практиковались. В связи с таким подходом, даже в программах классических университетов, на этапе изучения базовых курсов, систематического изучения универсальных алгебр, как структур с тождествами и системами ядерных условий, не предусмотрено. Теория отношений развилась до уровня, когда в категории отношений были разработаны аналоги теории Галуа в теории групп [23, 24].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: Сов. радио, 1970.
2. Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп / ред. А.М. Арбиб. М.: Статистика, 1975.
3. *Берлекэмп Э.* Алгебраическая теория кодирования. М.: Мир, 1971.
4. *Биркгоф Г., Барти Т.* Современная прикладная алгебра. М.: Мир, 1976.
5. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Наука, 1984.
6. *Глушков В.М., Цейтлин Г.А., Ющенко Е.Л.* Алгебра. Языки. Программирование. Киев: Наукова думка, 1978.
7. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
8. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. М.: Наука, 1987. Т. 1.
9. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972.
10. *Коблиц Н.* Курс теории чисел и криптографии. М.: ТВП, 2001.
11. *Лидлл Р., Нидеррайтер К.* Конечные поля. М.: Мир, 1988. Т. 1, 2.
12. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
13. *Любецкий В.А.* Основные понятия школьной математики. М.: Просвещение, 1987.
14. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
15. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
16. *Новиков П.С.* Неразрешимость проблемы сопряженности в теории групп. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18. С. 485-524.
17. *Новиков П.С.* Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов // Тр. МИАН СССР. 1955. Т. 44. С. 3-143.
18. *Плоткин Б.И.* Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных. М.: Наука, 1991.
19. *Самарский А.А.* Неизбежность новой методологии // Коммунист. 1989. № 1. С. 82-92.
20. *Скорняков Л.А.* Элементы алгебры. 2-е изд. М.: Наука, 1980.
21. *Скорняков Л.А.* Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.
22. *Фукс Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965.
23. *Цаленко М.Ш.* Моделирование семантики в базах данных. М.: Наука, 1989.
24. *Шафаревич И.Р.* Основные понятия алгебры. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1985. Т. 11.
25. *Dantzig G.* Linear Programming and Exstensions. New Jersy, 1963.
26. *Glivenko V.* Sur quelques points de la logique de M. Brouwer // Bull. Acad. des Sci. de Belgiue. 1939. V. 15. P. 183-188.
27. *Ore O.* Chains in partially ordered sets. // Bull. Amer. Math. Soc. 1943. V. 49. P. 558-566.

Поступила в редакцию 28 июня 2006 г.