

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены все предположения леммы, а также соотношения

$$0 \leq \varphi(t, \sigma)\sigma \leq (-\chi(0)^{-1} - \delta)\sigma^2, \quad 0 \leq \frac{\partial \varphi(t, \sigma)}{\partial \sigma}, \quad \sigma \in (-\infty, \infty),$$

где $\delta > 0$ любое сколь угодно малое число.

Тогда система (3) с $f(t) \equiv 0$ абсолютно устойчива в указанном классе нелинейностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович В.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

Буркин Игорь Михайлович
Тульский государственный ун-т
Россия, Тула
e-mail: bim@klax.tula.ru

Поступила в редакцию 4 мая 2007 г.

ПРИБЛИЖЕНИЕ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ СИСТЕМАМИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ¹

© Т. С. Быкова

Рассматривается линейная система с последствием

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 dA(t, s)x_t(s), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \quad (1)$$

которую будем отождествлять с функцией A , ее задающей. Здесь запись x_t означает функцию $s \rightarrow x_t(s) \doteq x(t+s)$ переменного $s \in [-r, 0]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, $r > 0$, и функция $A : \mathbb{R} \times [-r, 0] \rightarrow \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ удовлетворяет условиям, которые обеспечивают существование, единственность и непрерывную зависимость от начальных данных решения задачи Коши для системы (1).

В качестве пространства начальных функций рассматривается пространство $\mathfrak{S}$ всех непрерывных функций $u : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с L_2 -нормой $\|u(\cdot)\|_2 = \left(\int_{-r}^0 |u(s)|^2 ds \right)^{1/2}$.

Всякое решение $t \rightarrow x(t, u)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t) = u(t)$ при $t \in [-r, 0]$, порождает движение $t \rightarrow x_t(\cdot, u) \doteq x_t(u)$ в пространстве $\mathfrak{S}$, $t \geq 0$. Для $x_t(u)$ определим $\mathbb{L}_2$ -показатель Ляпунова $\varkappa(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|x_t(u)\|_2$, $\varkappa(0) \doteq -\infty$. Тогда

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 06-01-00258).

$\mathfrak{S}^- \doteq \{u \in \mathfrak{S} : \kappa(u) = -\infty\}$ образует линейное подпространство в $\mathfrak{S}$. Пусть $\mathfrak{S}^+$ — прямое дополнение подпространства $\mathfrak{S}^-$ до пространства $\mathfrak{S}$.

Зафиксируем в $\mathfrak{S}^+$ линейное подпространство $\mathbb{S}_0^p$ размерности p и построим движение $t \rightarrow x_t(\mathbb{S}_0^p) \doteq \mathbb{S}_t^p$ пространства $\mathbb{S}_0^p$. Будем говорить, что это движение порождено *сужением* системы A на подпространство $\mathbb{S}_0^p$. Такое сужение обозначим $(A, \mathbb{S}_0^p)$.

Наряду с системой $(A, \mathbb{S}_0^p)$ рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = B(t)y, \quad t \geq 0, \quad y \in \mathbb{R}^p \quad (2)$$

с непрерывной на полуоси $\mathbb{R}_+$ функцией $t \rightarrow B(t)$. Будем далее отождествлять систему (2) с задающей ее матрицей B и называть системой B . По аналогии с подпространством $\mathbb{S}_t^p$, введем в рассмотрение линейное пространство $\mathbb{R}_t^p$ размерности p с базисом $y^1(t), \dots, y^p(t)$, образующим столбцы матрицы Коши $Y(t, \tau)$ системы B при $\tau = 0$.

Пусть $\mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$ — пространство линейных операторов, действующих из $\mathbb{S}_t^p$ в $\mathbb{R}_t^p$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{R}^p}$.

О п р е д е л е н и е. Функцию $t \rightarrow L(t) \in \mathfrak{L}(\mathbb{S}_t^p, \mathbb{R}_t^p)$ будем называть *обобщенным ляпуновским преобразованием* систем $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B , если: 1) функция $t \rightarrow L(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$; 2) при $t \geq 0$ оператор $L(t)$ является гомеоморфизмом пространств $\mathbb{S}_t^p$ и $\mathbb{R}_t^p$ и 3) выполнено неравенство $\sup_{t \geq 0} (\|L(t)\|_{\mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{R}^p} + \|L^{-1}(t)\|_{\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{L}_2}) < \infty$.

Будем говорить также, что система $(A, \mathbb{S}_0^p)$ *приводима* обобщенным ляпуновским преобразованием L к системе B , или что системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ и B *асимптотически подобны*.

Т е о р е м а (см. [1, 2]). Пусть $\mathbb{S}_0^p \subset \mathfrak{S}^+$. Тогда:

а) найдется ортогональное $(L^*(t)L(t) = I_p)$ обобщенное ляпуновское преобразование, приводящее систему $(A, \mathbb{S}_0^p)$ к системе B с непрерывной на $\mathbb{R}_+$, верхней треугольной матрицей $B(t)$;

б) если, кроме того, всякое решение системы $(A, \mathbb{S}_0^p)$ «продолжаемо влево», то есть найдется константа $\alpha > 0$ такая, что для каждого $u \in \mathbb{S}_0^p$, любого $\tau \in [-r, 0]$ и всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено неравенство $\|x_{t+\tau}(\cdot, u)\|_2 \leq \alpha \|x_t(\cdot, u)\|_2$, то в множестве $\{B\}$ всех систем, асимптотически подобных системе $(A, \mathbb{S}_0^p)$, найдется система B с ограниченной на полуоси $\mathbb{R}_+$ верхней треугольной матрицей $B(t)$.

С л е д с т в и е 1. Если $\dim \mathfrak{S}^+ = p$ и L — ляпуновское преобразование, приводящее систему $(A, \mathfrak{S}^+)$ к системе B , то всякое движение x_t , порожденное решением системы A , представимо в виде суммы

$$x_t = L^{-1}(t)y(t) + z_t = U_t Y(0, t)y(t) + z_t, \quad (3)$$

где $U_t \doteq U_t(s) = (x_t^1(s) \dots x_t^p(s))$, $x_t^i(s) = x_t(s, u^i)$, $s \in [-r, 0]$, $u^1, \dots, u^p$ — базис пространства $\mathfrak{S}^+$, $Y(t, \tau)$ — матрица Коши системы (2), $y(t)$ — решение системы B , $z(t)$ — такая функция, что $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|z_t(\cdot)\|_2 = -\infty$.

Пусть $\mathfrak{S}^-_\mu \doteq \{u \in \mathfrak{S} : \kappa(u) < \mu\}$ и $\mathfrak{S}^+_\mu$ — прямое дополнение подпространства $\mathfrak{S}^-_\mu$ до пространства $\mathfrak{S}$.

С л е д с т в и е 2. Если $\dim \mathfrak{S}^+_\mu = p$ и L — ляпуновское преобразование, приводящее систему $(A, \mathfrak{S}^+_\mu)$ к системе B , то всякое движение x_t , порожденное решением системы A , представимо в виде (3), где $y(t)$ — решение системы B , $z(t)$ — такая функция, что $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|z_t(\cdot)\|_2 < \mu$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быкова Т.С., Тонков Е.Л. Ляпуновская приводимость линейной системы с последствием // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 6. С. 731–737.
2. Быкова Т.С., Тонков Е.Л. Асимптотическая теория линейных систем с последствием // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2006. Вып. 2(36). С. 21–26.

Быкова Татьяна Сергеевна
Ижевский государственный
технический ун-т
Россия, Ижевск
e-mail: tsbkv@udm.net

Поступила в редакцию 4 мая 2007 г.

ЯДРО И РАВНОВЕСИЕ В МОДЕЛЯХ ОБМЕНА С ЭКСТЕРНАЛИЯМИ ¹

© В. А. Васильев

Доклад посвящен анализу условий существования и коалиционной стабильности некоторых аналогов так называемого информационного равновесия в моделях экономического обмена с экстерналиями, изучавшегося в работах [1], [2].

Моделью экономического обмена с экстерналиями будем называть систему

$$\mathcal{E} = \langle N, L, \{X_i, w^i, u_i\}_{i \in N} \rangle,$$

где $N = \{1, \dots, n\}$ — множество участников, $L = \{1, \dots, l\}$ — множество продуктов, $X_i \subseteq \mathbb{R}^l$ — потребительское множество участника $i \in N$, а $w^i \in \mathbb{R}^l$ и $u_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ — его начальный запас продуктов и функция полезности, соответственно (здесь, как и всюду далее, $X = \prod_{i \in N} X_i$). Специфической чертой рассматриваемой модели является неавтономность функций u_i (в классических моделях обмена функция полезности каждого участника i определена лишь на его потребительском множестве X_i и, следовательно, «нечувствительна» к уровню потребления других экономических агентов). Известно, что наличие «экстерналий» (externalities) в потреблении приводит к потере Парето-оптимальности стандартных равновесных распределений и необходимости рассмотрения надлежащих модификаций вальрасовского равновесия, свободных от указанного недостатка. К таким модификациям относятся и предложенное В.Л. Макаровым информационное равновесие, изучаемое в настоящей работе.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 05-02-02005), программы Государственной поддержки ведущих научных школ (грант № 4999.2006.6) и РФФИ (проект № 07-06-00363).