Литература

1. А. А. Артемов. Преобразование Пуассона для однополостного гиперболоида. Матем. сб., 2004, том 195, № 5, 33–58.

2. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1965.

3. Л. И. Грошева. Канонические и граничные представления на пространстве Лобачевского. Вестник Тамбовского ун-та. Серия: Естеств. и техн. науки, 2004, том 9, вып. 3, 306–311.

4. В. Ф. Молчанов. Канонические представления на двуполостных гиперболоидах. Записки научных семинаров ПОМИ, 2006, том 331, 91–124.

5. V. F. Molchanov. Canonical and boundary representations on a hyperboloid of one sheet. Acta Appl. Math., 2004, vol. 81, Nos. 1–3, 191–204.

6. V. F. Molchanov. Canonical representations on the two-sheeted hyperboloid. Indag. Math., 2005, vol. 16, Nos. 3–4, 609–630.

УДК 519.1

Преобразование Радона на плоскости над конечным кольцом [2]

© Е. В. Водолажская

Ключевые слова: преобразование Радона, конечные поля, кольца классов вычетов

Преобразование Радона R на плоскости над конечным кольцом K сопоставляет функции f на K суммы ее значений по прямым. Кольцо K есть либо конечное поле, либо кольцо классов вычетов по модулю p^k. Найдены формулы обращения. Дано описание образа преобразование R для поля и $k = 2$.

The Radon transform R on the plane over a finite ring K assigns to a function f on K sums of its values on lines. The ring K is either a finite field or the ring of cosets modulo p^k. Inversion formulas are found. A description of the image of R is given for a field and for $k = 2$.

[2]Работа поддержана грантами: РФФИ 08-07-97507 р_центр_а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом 1.5.07.

Пусть K – конечное кольцо. *Прямой* на плоскости $K^2 = K \times K$ над кольцом K назовем множество ℓ всех точек $(x, y) \in K^2$, удовлетворяющих уравнению:

$$ax + by = c, \tag{0.1}$$

где $a, b, c \in K$, причём a и b не являются делителями нуля одновременно. Прямая ℓ определяется тройкой элементов $(a, b, c) \in K^3$ с точностью до общего множителя, не являющегося делителем нуля. Пусть H – множество всех прямых.

Для конечного множества X пусть $|X|$ есть количество элементов в нем и $L(X)$ есть линейное пространство функций на X со значениями в $\mathbb{C}$. Размерность его равна $|X|$.

Преобразование Радона R сопоставляет всякой функции $f \in L(K^2)$ функцию $Rf \in L(H)$, которая равна "интегралу" функции f по прямой ℓ, то есть

$$(Rf)(\ell) = \sum_{(x,y)\in\ell} f(x, y)$$

Преобразование R есть линейный оператор $L(K^2) \to L(H)$.

Мы рассматриваем два случая. Первый: K – конечное поле $\mathfrak{k}$, второй (более сложный) K – кольцо $\mathbb{Z}_n$ классов вычетов по модулю n. При изучении преобразования Радона основными задачами являются: описать его образ и получить формулу обращения (если оно инъективно). Нам удалось решить эти задачи для конечного поля, а в случае кольца $\mathbb{Z}_n$ – для $n = p^2$, где p – простое число. Для кольца $\mathbb{Z}_n$ с $n = p^k$, p – простое число, получена формула обращения.

§ 1. Преобразование Радона на плоскости над конечным полем

Пусть $\mathfrak{k}$ – поле, состоящее из q элементов. Плоскость $\mathfrak{k}^2$ состоит из q^2 элементов, так что

$$\dim L(\mathfrak{k}^2) = q^2.$$

Прямая ℓ на плоскости $\mathfrak{k}^2$ задается уравнением (0.1) с условием, что a и b не равны нулю одновременно.

Теорема 1.1 *Количество $|H|$ всех прямых равно $q^2 + q$, так что*

$$\dim L(H) = q^2 + q.$$

Доказательство. В уравнении (0.1) возможны два случая: 1) $a = 0$, тогда $b \neq 0$, и уравнение прямой принимает вид $y = c_1$, всего имеется q таких прямых; 2) $a \neq 0$, тогда уравнение прямой принимает вид $x + b_1 y = c_1$, всего имеется $q \cdot q = q^2$ таких прямых. Следовательно, количество всех прямых равно $q^2 + q$. $\square$

Рассмотрим некоторые геометрические задачи на плоскости $\mathfrak{k}^2$. Доказательства приведённых ниже теорем вполне стандартны и повторяют доказательства соответствующих фактов из курса линейной алгебры.

Назовём две прямые из H *параллельными*, если они не пересекаются, то есть не имеют общих точек.

Теорема 1.2 *Прямая ℓ_1, заданная уравнением*

$$a_1x + b_1y = c_1, \tag{1.1}$$

параллельна прямой ℓ_2, заданной уравнением

$$a_2x + b_2y = c_2, \tag{1.2}$$

тогда и только тогда, когда главный определитель системы уравнений (1.1) *и* (1.2) *равен нулю, а ранг расширенной матрицы этой системы равен двум, то есть*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$$

Теорема 1.3 *Через любые две различные точки плоскости $\mathfrak{k}^2$ проходит единственная прямая.*

Теорема 1.4 *Через любую точку плоскости $\mathfrak{k}^2$ проходит ровно $q+1$ прямая.*

Пучком параллельных прямых назовём множество всех параллельных между собой прямых. Каждый пучок содержит q прямых.

Теорема 1.5 *Пучки параллельных прямых состоят из прямых вида*

$$a_0x + b_0y = c,$$

где a_0, b_0 – фиксированы для данного пучка, элемент c пробегает все значения из множества $\mathfrak{k}$.

Дадим описание образа $\operatorname{Im} R$ преобразования Радона. Обозначим через Π множество всех пучков π параллельных прямых.

Теорема 1.6 *Количество пучков параллельных прямых равно $q+1$:*

$$|\Pi| = q + 1.$$

Теорема 1.7 *Если просуммировать преобразование Радона Rf функции f по прямым любого пучка π параллельных прямых, то получим одно и то же число:*

$$\sum_{\ell \in \pi} (Rf)(\ell) = If, \qquad \forall \pi \in \Pi$$

где

$$If = \sum_{(x,y) \in \mathfrak{k}^2} f(x, y).$$

Обозначим через $L_R(H)$ подпространство в $L(H)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\sum_{\ell\in\pi_1}(Rf)(\ell) = \sum_{\ell\in\pi_2}(Rf)(\ell) \tag{1.3}$$

для любых параллельных пучков π_1 и π_2.

Теорема 1.8 *Количество независимых уравнений вида (1.3) равно q, следовательно,*

$$\mathrm{dim}L_R(H) = q^2.$$

Теорема 1.9 $\mathrm{Im}\, R \subset L_R(H)$.

Доказательство следует из теоремы 1.7.

Определим оператор $M_0 : L(H) \to L(\mathfrak{k}^2)$ формулой

$$(M_0F)(z) = \sum_{z\in\ell}(F)(\ell).$$

Теорема 1.10 *Преобразование Радона R инъективно, оно изоморфно отображает пространство $L(\mathfrak{k}^2)$ на пространство $L_R(H)$. Формула обращения имеет вид:*

$$f(z_0) = \frac{1}{q}\Big\{(M_0Rf)(z_0) - \sum_{\ell\in\pi}(Rf)(\ell)\Big\}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную фиксированную точку $z_0 \in \mathfrak{k}^2$ и найдём сумму преобразований Радона Rf по всем прямым, проходящим через эту точку. Согласно теореме 1.3 и теореме 1.4 эта сумма равна

$$(M_0Rf)(z_0) = (q+1)f(z_0) + \sum_{z\neq z_0} f(z) = qf(z_0) + If.$$

Отсюда получим формулу (1.4). Следовательно, отображение R инъективно и $\dim \mathrm{Im}\, R = q^2$. Так как $\dim\, L_R(H) = q^2$, то $\mathrm{Im}\, R = L_R(H)$. $\square$

§ 2. Преобразование Радона на плоскости над кольцом $\mathbb{Z}_n$, $n = p^2$

Пусть K есть кольцо $\mathbb{Z}_n$ классов вычетов целых чисел по модулю n. В этом параграфе рассмотрим случай, когда $n = p^2$, где p – простое число.

Плоскость K^2 состоит из $n^2 = p^4$ элементов, так что

$$\dim\, L(K^2) = p^4.$$

Обозначим через D подмножество кольца K, состоящее из делителей нуля кольца K. Оно содержит p элементов: $0, p, 2p, \ldots, (p{-}1)p$. Множество D является подгруппой в K относительно сложения. Фактор-группа $W = K/D$ есть циклическая группа $\mathbb{Z}_p$: класс смежности из W есть $i + D$, $i = 0, 1, 2, \ldots, p-1$. Множество точек $z = (x, y)$, у которых $x, y \in D$, есть D^2.

Как уже сказано, прямая ℓ на плоскости $\mathfrak{k}^2$ задается уравнением (0.1) с условием, что a и b не принадлежат множеству D одновременно.

Теорема 2.1 *Количество $|H|$ всех прямых равно $p^4 + p^3$, так что*

$$\dim L(H) = p^4 + p^3.$$

Доказательство. В уравнении (0.1) возможны два случая: 1) $a \notin D$, тогда мы можем разделить уравнение (0.1) на a, получим $x + b_1 y = c_1$, где $c_1 \in K$. Всего имеется $n \cdot n = p^4$ таких прямых. 2) $a \in D$, тогда обязательно $b \notin D$, и после деления на b уравнение прямой ℓ принимает вид $a_1 x + y = c_1$, где $c_1 \in K$, $a_1 \in D$. Всего имеется $|K| \cdot |D| = p^3$ таких прямых. Итого количество всех прямых равно $p^4 + p^3$. $\square$

Уравнения прямых, полученные в доказательстве теоремы 2.1, а именно,

$$x + by = c, \quad b, c \in K, \tag{2.1}$$
$$ax + y = c, \quad a \in D, c \in K, \tag{2.2}$$

назовём *стандартными*. Мы можем считать, что всякая прямая задаётся одним из уравнений (2.1) и (2.2).

Рассмотрим некоторые геометрические задачи на плоскости K^2.

Две прямые назовём *параллельными*, если их можно задать уравнениями (0.1) с одинаковыми a, b и разными c. Параллельные прямые не пересекаются. Но не всякие две непересекающиеся прямые параллельны, например, прямые $y = 0$ и $px + y = 1$ не пересекаются, но не параллельны. Совокупность параллельных между собой прямых назовём *пучком параллельных прямых.* Такой пучок π состоит из p прямых: в уравнении (0.1) фиксируем a, b. Если использовать стандартные уравнения (2.1) и (2.2), то пучок задаётся парой $(1, b)$, $b \in K$, или $(d, 1)$, $d \in D$. Всего имеется $p^2 + p$ пучков параллельных прямых. Совокупность всех пучков параллельных прямых обозначим Π.

Количество точек пересечения двух прямых ℓ и ℓ_1 есть количество решений системы

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1 x + b_1 y = c_1 \end{cases} \tag{2.3}$$

первое и второе уравнения задают прямые ℓ и ℓ_1, соответственно.

Введём определители, участвующие в правиле Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

Теорема 2.2 *Если $\Delta \notin D$, то прямые ℓ и ℓ_1 имеют единственную общую точку, она находится по правилу Крамера:*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \tag{2.4}$$

Если $\Delta = 0$, то прямые ℓ и ℓ_1 либо совпадают, либо параллельны. Если $\Delta \in D$, $\Delta \neq 0$ и хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y не лежит в D, то прямые ℓ и ℓ_1 не пересекаются (но не параллельны!). Наконец, если $\Delta \in D$, $\Delta \neq 0$ и оба определителя Δ_x, Δ_y принадлежат D, то прямые ℓ и ℓ_1 имеют p общих точек.

Доказательство. Для $\Delta \notin D$ утверждение теоремы сразу следует из (2.4).

Если $\Delta = 0$, то уравнение $a_1x + b_1y = c_1$ можно переписать как $ax + by = c_2$. При $c_2 = c$ прямые совпадают, при $c_2 \neq c$ – параллельны.

Пусть $\Delta \in D$, $\Delta \neq 0$, и хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y не лежит в D, тогда утверждение теоремы следует также из (2.4).

Пусть $\Delta, \Delta_x, \Delta_y \in D$. Хотя бы один из коэффициентов a, b не лежит в D. Пусть это будет a. Тогда мы можем выразить x из первого уравнения системы (2.3):

$$x = \frac{1}{a}(c - by).$$

Подставим это во второе уравнение, получаем уравнение для y:

$$\Delta \cdot y = \Delta_y.$$

По предположению относительно $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$ имеем

$$\Delta = p\,\alpha, \quad \Delta_y = p\,\gamma,$$

где $\alpha \notin D$. Следовательно,

$$p(\alpha\, y - \gamma) = 0.$$

Это уравнение имеет p решений:

$$y = y_0 + u, \quad u \in D,$$

где $y_0 = \gamma/\alpha$. Обозначим

$$u = -av, \quad x_0 = \frac{c - by_0}{a} = \frac{c\alpha - b\gamma}{a\gamma}.$$

тогда решения системы (2.3) даются формулами:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + bv, \\ y &= y_0 - av, \end{aligned}$$

где v пробегает D. $\square$

Теорема 2.3 *Через всякую точку на плоскости проходит p^2+p прямых.*

Доказательство. Прямая, проходящая через точку (x_0, y_0), задаётся уравнением

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0. \tag{2.5}$$

Количество пар (a,b), где хотя бы одно из чисел a,b не лежит в D, равно p^2+p (см. доказательство теоремы 2.1). $\square$

Теперь возьмём на плоскости две различные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) и найдём количество прямых, проходящих через них.

Теорема 2.4 *Если хотя бы одна из разностей x_1-x_0, y_1-y_0 не лежит в D, то через две точки (x_0,y_0), (x_1,y_1) проходит единственная прямая. Эта прямая задаётся уравнением:*

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство стандартно.

Теорема 2.5 *Если обе разности x_1-x_0, y_1-y_0 лежат в D, то через две точки (x_0,y_0), (x_1,y_1) проходит p прямых.*

Доказательство. Имеем

$$x_1-x_0=pk,$$

$$y_1-y_0=pm,$$

где хотя бы одно из чисел k,m не лежит в D. Для коэффициентов a,b из (2.5) получаем уравнение:

$$p(ak+bm)=0.$$

Это уравнение имеет p решений, а именно

$$a=m+u, \quad b=-k+u, \quad u\in D. \tag{2.13}$$

По крайней мере один из коэффициентов k,m не лежит в D (поскольку точки (x_0,y_0), (x_1,y_1) различны). Следовательно, хотя бы один из коэффициентов a,b, определяемых формулами (2.7), не лежит в D. $\square$

Заметим, что для двух прямых из теоремы 2.5 выполняется последний случай теоремы 2.2: все определители Δ, Δ_x, Δ_y лежат в D.

Теорема 2.6 *Фиксируем точку z на плоскости. Возьмём объединение всех прямых как множеств точек, проходящих через z, считая с кратностями. Тогда кратность самой точки z равна p^2+p, кратность точек $z+w$, где $w\in D^2$, $w\neq 0$, равна p, кратность остальных точек равна 1.*

Доказательство следует из теорем 2.3, 2.4, 2.5.

Пусть два пучка π_1, π_2 параллельных прямых определяются парами (a_1, b_1), (a_2, b_2) соответственно. Назовём эти пучки *родственными*, если определитель, составленный из пар (a_1, b_1), (a_2, b_2), принадлежит множеству D, то есть

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \in D.$$

Отношение родственности есть отношение эквивалентности, которое разбивает множество Π на классы Π_α родственных между собой пучков, то есть

$$\Pi = \bigsqcup_\alpha \Pi_\alpha.$$

Все пучки, определяемые парой $(d, 1)$, где $d \in D$, попадают в один класс родственных пучков, а множество пучков, определяемых парами $(1, b)$, где $b \in K$, распадается на p классов родственных пучков. Причём в один класс попадают пучки с парами $(1, b)$, где b принадлежит одному классу смежности $\alpha + D$ из $W = K/D$.

Теорема 2.7 *Количество классов родственных пучков равно $p + 1$.*

Дадим каждому пучку параллельных прямых класса родственных пучков Π_α номер $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ так, чтобы класс Π_α, заданный парой $(1, b)$, где $b = \alpha + pk$, состоял из пучков $\pi_k^{(\alpha)}$.

Назовём *малым пучком* совокупность прямых, задаваемых уравнениям (0.1) с одними и теми же a, b, для которых правые части c лежат в одном классе смежности из $W = K/D$. Прямые из малого пучка параллельны друг другу.

Всякий пучок параллельных прямых распадается на p малых пучков. Обозначим через S_α множество всех малых пучков, лежащих в одном классе родственных пучков Π_α. Совокупность S_α состоит из p^2 малых пучков $\sigma_{k,i}^{(\alpha)}$, где i, k пробегают множество $M = 0, 1, \ldots, p-1$, индекс k указывает номер пучка $\pi_k^{(\alpha)}$ из Π_α индекс i нумерует малые пучки из $\pi_k^{(\alpha)}$, а именно, свободный член c в стандартных уравнениях (2.1), (2.2) принадлежит классу смежности $i + D \in W$. Таким образом, S_α находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $M^2 = M \times M$.

Теорема 2.8 *Для двух малых пучков $\sigma_{k,i}^{(\alpha)}$, $\sigma_{l,j}^{(\alpha)}$ с разными i, j всякая прямая из одного малого пучка не пересекается со всякой прямой из второго малого пучка.*

Доказательство следует из теоремы 2.2 и определения класса родственных пучков.

Пусть $i \mapsto \varphi(i)$ – произвольная функция, отображающая множество M в себя.

Назовём *комбинированным пучком* $\delta_{\varphi}^{(\alpha)}$ объединение прямых из следующих малых пучков множества S_{α}:

$$\delta_{\varphi}^{(\alpha)} = \coprod_{i} \sigma_{\varphi(i),i}^{(\alpha)}.$$

Количество прямых в комбинированном пучке равно p^2.

Теорема 2.9 *Пусть* $\delta_{\varphi}^{(\alpha)}$ *– произвольный комбинированный пучок. Всякая точка* $(x, y) \in K^2$ *лежит на одной и только одной прямой из этого пучка.*

Доказательство. По теореме 2.8 любые две прямые из $\delta_{\varphi}^{(\alpha)}$ не пересекаются. С другой стороны, количество точек на всех прямых из $\delta_{\varphi}^{(\alpha)}$ равно $p^2 \cdot p^2 = p^4$, то есть количеству точек в K^2. $\square$

Обозначим через If "интеграл" от функции f по всей плоскости:

$$If = \sum_{z \in K^2} f(z). \tag{2.6}$$

Теорема 2.10 *Если просуммируем преобразование Радона* Rf *функции* f *по прямым любого комбинированного пучка* δ*, то получим одно и то же число* If*:*

$$\sum_{\ell \in \delta} (Rf)(\ell) = If. \tag{2.7}$$

Доказательство следует из теоремы 2.9.

Обозначим через $L_R(H)$ подпространство в $L(H)$ функций, удовлетворяющих уравнениям

$$\sum_{\ell \in \delta_1} F(\ell) = \sum_{\ell \in \delta_2} F(\ell) \tag{2.8}$$

для любых комбинированных пучков δ_1 и δ_2.

Теорема 2.11 *Количество независимых уравнений вида (2.8) равно* p^3*, так что*

$$\dim L_R(H) = p^4.$$

Доказательство. Для функции φ, отображающей множество M в себя, обозначим $\chi_{\varphi} \in L(M^2)$ характеристическую функцию графика φ, то есть

$$\chi_{\varphi}(i, k) = \begin{cases} 1, k = \varphi(i), \\ 0, k \neq \varphi(i). \end{cases}$$

Обозначим через $L_0(M^2)$ подпространство $L(M^2)$, натянутое на функции χ_{φ}. Его размерность равна $\dim L(M^2) - (p-1) = p^2 - p + 1$. Это следует из того, что ортогональное дополнение к $L_0(M^2)$ в $L(M^2)$ натянуто на функции

$$\lambda_{\varepsilon}(i, k) = \varepsilon^i, \quad i = 0, 1, \ldots, p-1,$$

из $L(M^2)$, где ε – произвольный корень p-ой степени из единицы, отличный от единицы. В самом деле,

$$\sum_{i,k} \chi_\varphi(i,k)\lambda_\varepsilon(i,k) = \sum_{i=0}^{p-1} \varepsilon^i = 0.$$

Учитывая теорему 2.7, получим, что количество независимых сумм вида (2.7) равно $(p+1)(p^2-p+1) = p^3+1$. $\square$

Теорема 2.12 *Образ* Im R *преобразования Радона входит в* $L_R(H)$.

Доказательство следует из теоремы 2.10.

Введем два оператора M_0 и M_1, отображающие $L(H)$ в $L(K^2)$. Первый из них определяется точно такой же формулой, что и в § 1, а второй – формулой

$$(M_1F)(z_0) = \sum_{z\in z_0+D^2} (M_0F)(z)$$

Теорема 2.13 *Преобразование Радона* R *инъективно, оно изоморфно отображает пространство* $L(K^2)$ *на пространство* $L_R(H)$. *Формула обращения имеет вид:*

$$f(z) = \frac{1}{p^2}(M_0Rf)(z) - \frac{1}{p^3}\sum_{\ell\in\pi}(Rf)(\ell) - \frac{p-1}{p^5}(M_1Rf)(z). \tag{2.9}$$

В качестве π *можно взять любой пучок параллельных прямых (см. (2.6)).*

Доказательство. Фиксируем точку z на плоскости и найдём сумму преобразования Радона Rf по всем прямым, проходящим через эту точку. Согласно теореме 2.6 эта сумма равна

$$(M_0Rf)(z) = p^2f(z) + If + (p-1)\sum_{w-z\in D^2} f(w). \tag{2.10}$$

Запишем аналогичные формулы для всех точек $v \in z + D^2$. Количество таких точек равно p^2. Сложив полученные формулы, имеем:

$$\begin{aligned}(M_1Rf)(z) &= p^2\sum_{w-z\in D^2} f(w) + p^2\, If + p^2(p-1)\sum_{w-z\in D^2} f(w) = \\ &= p^3\sum_{w-z\in D^2} f(w) + p^2\, If.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{w-z\in D^2} f(w) = \frac{1}{p^3}(M_1Rf)(z_0) - \frac{1}{p}\, If. \tag{2.11}$$

Подставим формулу (2.11) в (2.10), получим

$$(M_0Rf)(z) = p^2 f(z) + If + +\frac{p-1}{p^3}(M_1Rf)(z) - \frac{p-1}{p}\, If,$$

откуда следует (2.9). Следовательно, отображение R инъективно и размерность пространства $\mathrm{Im}\ R$ равна p^4. Так как ту же размерность имеет пространство $L_R(H)$, см. теорему 2.11, то по теореме 2.12 $\mathrm{Im}\ R$ совпадает с $L_R(H)$. $\square$

§ 3. Преобразование Радона на плоскости над кольцом $\mathbb{Z}_n$, $n = p^k$

В этом параграфе мы рассмотрим кольцо $K = \mathbb{Z}_n$ классов вычетов целых чисел по модулю $n = p^k$, где p – простое число. Описание образа преобразования Радона для $k > 2$ оказывается очень сложным. Мы ограничимся нахождением формул обращения.

Обозначим через D_m, $m = 1, 2, \ldots, k-1$, подмножество кольца K, состоящее из элементов, которые делятся на p^m. Оно состоит из элементов

$$0, p^m, 2p^m, \ldots, (p^{k-m} - 1)p^m,$$

всего p^{k-m} элементов. Множество D_m является циклической подгруппой в K относительно сложения. Множество D делителей нуля есть D_1.

Обозначим через D_m^2 множество точек $z = (x, y)$, у которых $x, y \in D_m$.

Следующие три теоремы доказываются аналогично соответствующим теоремам из § 2.

Теорема 3.1 *Количество $|H|$ всех прямых равно $p^{2k} + p^{2k-1}$, так что*

$$\dim\, L(H) = p^{2k} + p^{2k-1}.$$

Теорема 3.2 *Через всякую точку $(x_0, y_0) \in K^2$ проходит $p^{k+1} + p^k$ прямых.*

Теорема 3.3 *Если обе разности $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$ лежат в D_m и хотя бы одна из них не лежит в D_{m+1}, то через две точки (x_0, y_0), (x_1, y_1) проходит p^m прямых.*

Рассмотрим операторы $M_0, M_1, \ldots, M_{k-1}$, отображающие $L(H)$ в $L(K^2)$. Первый из них, то есть M_0, определяется точно такой же формулой, что и в § 1, остальные – формулой

$$(M_mF)(z) = \sum_{w \in z + D_m^2} (M_0F)(w).$$

Теорема 3.4 *Преобразование Радона R инъективно, формула обращения имеет вид:*

$$f(z) = \frac{1}{p^k}\,(M_0Rf)(z) - \frac{1}{p^{2k-1}} \sum_{\ell \in \pi} (Rf)(\ell) - (p-1) \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{p^{k+3m}}\,(M_{k-m}Rf)(z),$$

во втором слагаемом в правой части можно взять любой пучок параллельных прямых π.

Доказательство теоремы для прозрачности мы проведем для частного случая $k = 3$. Тогда формула обращения имеет вид:

$$f(z) = \frac{1}{p^3}(M_0 Rf)(z) - \frac{1}{p^5}\, If - \frac{p-1}{p^9}(M_1 Rf)(z) - \frac{p-1}{p^6}(M_2 Rf)(z) \qquad (3.1)$$

Фиксируем точку $z \in K^2$ и найдём сумму преобразования Радона Rf по всем прямым, проходящим через эту точку. Эта сумма равна

$$\begin{aligned}(M_0 Rf)(z) &= p^3 f(z) + If + \\ &+ (p-1)\sum_{w-z\in D_1^2} f(w) + (p^2-p)\sum_{w-z\in D_2^2} f(w)\end{aligned} \qquad (3.2)$$

Запишем аналогичные формулы для всех точек $v \in z + D_1^2$. Количество таких точек равно p^4. Сложив полученные формулы, получаем:

$$\begin{aligned}(M_1 Rf)(z) &= p^3 \sum_{w-z\in D_1^2} f(w) + p^4\, If + \\ &+ p^4(p-1)\sum_{w-z\in D_1^2} f(w) + p^2(p^2-p)\sum_{w-z\in D_1^2} f(w) = \\ &= p^5 \sum_{w-z\in D_1^2} f(w) + p^4\, If.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{w-z\in D_1^2} f(w) = \frac{1}{p^5}(M_1 Rf)(z) - \frac{1}{p}\, If. \qquad (3.3)$$

Запишем аналогичные формулы для всех точек $u \in z + D_2^2$. Количество таких точек равно p^2. Сложив полученные формулы, получаем:

$$\begin{aligned}(M_2 Rf)(z) &= p^3 \sum_{w-z\in D_2^2} f(w) + p^2\, If + \\ &+ p^2(p-1)\sum_{w-z\in D_1^2} f(w) + +p^2(p^2-p)\sum_{w-z\in D_2^2} f(w) = \\ &= p^4 \sum_{w-z\in D_2^2} f(w) + p^2\, If + \\ &+ p^2(p-1)\Big\{\frac{1}{p^5}(M_1 Rf)(z) - \frac{1}{p}\, If\Big\} = \\ &= p^4 \sum_{w-z\in D_2^2} f(w) + p\, If + \frac{p-1}{p^3}(M_1 Rf)(z).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{w-z\in D_2^2} f(w) = \frac{1}{p^4}(M_2 F)(z) - \frac{1}{p}\, If - \frac{p-1}{p^7}(M_1 F)(z) \qquad (3.4)$$

Подставив (3.3), (3.4) в (3.2), получим требуемую формулу (3.1). $\square$

УДК 517.98

Конечномерный анализ на комплексном гиперболоиде [3]

© **О. В. Гришина**

Ключевые слова: комплексный гиперболоид, представления, сферические функции, гармонические многочлены

Исследован конечномерный анализ на комплексном гиперболоиде в $\mathbb{C}^3$, он связан с разложением на неприводимые составляющие тензорных произведений конечномерных представлений группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Finite dimensional analysis on the complex hyperboloid in $\mathbb{C}^3$ is investigated, it is related to decomposition into irreducible constituents of the tensor products of finite dimensional representations of the group $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

В этой работе мы переносим на *комплексный* гиперболоид результаты работы [2] о конечномерном анализе для *вещественного* гиперболоида в трехмерном пространстве. Этот анализ связан с разложением на неприводимые составляющие тензорного произведения произвольного неприводимого конечномерного представления группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ и его контраградиентного. Такие тензорные произведения реализуются в многочленах на гиперболоиде. Мы находим действие соответствующих сплетающих операторов (преобразований Пуассона и Фурье), вычисляем сферические функции и устанавливаем "формулу Планшереля".

§ 1. Представления группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

Приведем некоторые факты о представлениях группы $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, см., например, [1]. Группа G состоит из комплексных матриц

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{1.1}$$

[3]Работа поддержана грантами: РФФИ 07-01-91209 ЯФ_а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом 1.5.07.