УДК 517.98

# ИНДИКАТОРНЫЕ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПАРА-ЭРМИТОВЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ РАНГА ОДИН[1]

© Н. Б. Волотова

Ключевые слова: симметрические пространства; конечномерные представления; производящие функции.

Аннотация: Предъявляются системы дифференциальных уравнений, выделяющие пространства конечномерных представлений группы $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, реализующихся в многочленах на группе Гейзенберга размерности $2n-3$.

*Индикаторные системы* были введены Желобенко, см. [2], гл. X. Это – системы уравнений, выделяющие конечномерные представления группы $\mathrm{SL}(\mathrm{n},\mathbb{C})$, содержащиеся в основной *невырожденной* серии представлений этой группы. Мы рассматриваем аналогичные представления, содержащиеся в *вырожденной* серии представлений группы $\mathrm{SL}(\mathrm{n},\mathbb{R})$, отвечающей разбиению $n = 1+(n-2)+1$ числа $n$. Они реализуются в многочленах на подгруппе $Z$ нижних унипотентных блочных матриц. Группа $Z$ есть группа Гейзенберга размерности $2n-3$.

Будем записывать матрицы из $G$ в блочном виде соответственно указанному разбиению. Пусть $Z$, $B$ и $H$ – подгруппы, состоящие соответственно из матриц

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & E & 0 \\ c & s & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} p & * & * \\ 0 & q & * \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

где $s$ – вектор-строка из $\mathbb{R}^{n-2}$, $t$ – вектор-столбец из $\mathbb{R}^{n-2}$, $c$ – число из $\mathbb{R}$, $p,r$ – числа из $\mathbb{R}^*$, $q$ – матрица из $\mathrm{GL}(n-2,\mathbb{R})$. Матрица, обратная матрице $z$, есть

$$z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t & E & 0 \\ \widehat{c} & -s & 1 \end{pmatrix},$$

где $\widehat{c} = st - c$. Пусть $dz = dc\, ds_2 \dots ds_{n-1}\, dt_2 \dots dt_{n-1}$ – инвариантная мера на $Z$.

Почти всякую матрицу $g \in G$ можно записать в виде произведения: $g = bz$ (разложение Гаусса).

Представление $T_{l,m}$, где $l, m \in \{0,1,2,\dots\}$, группы $G$ действует в некотором подпространстве $V_{l,m}$ пространства $V$ многочленов на $Z$ по формуле

$$(T_m(g)f)\,(z) = f(\widetilde{z})\,\widetilde{r}^{\,l}/\widetilde{p}^{\,m},$$

где $\widetilde{z}$, $\widetilde{r}$, $\widetilde{p}$ находятся из разложения Гаусса матрицы $zg$: $zg = \widetilde{b}\widetilde{z}$. Пространство $V_{l,m}$ содержит тождественную единицу 1 в качестве циклического вектора. Представление $T_{l,m}$ неприводимо, его младший вектор есть 1, старший вектор есть $c^l\,\widehat{c}^{\,m}$, старший вес есть $(l,0,\dots,0,-m)$.

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 09-01-00325 а, научной программой "Развитие научного потенциала высшей школы" РНП 2.1.1/1474 и Темпланом 1.5.07.

Пусть $E_{ij}$ обозначает "матричную единицу", это матрица, в которой на месте $(i,j)$ стоит 1, а на остальных местах стоят нули. В алгебре Ли группы $Z$ матрицы $E_{i1}$, $E_{ni}$, $i=2,\ldots,n-1$, являются образующими. Инфинитезимальные операторы левых сдвигов на группе $Z$, отвечающих этим матрицам, – это дифференциальные операторы

$$L_i = \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad D_i = t_i \frac{\partial}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial s_i}, \quad i=2,\ldots,n-1.$$

Назовем *индикаторной системой* следующую систему уравнений:

$$L_i^{m+1} f = 0, \quad D_i^{l+1} f = 0, \quad i=2,\ldots,n-1.$$

Т е о р е м а. *Пространство $V_{l,m}$ есть в точности пространство решений в $V$ индикаторной системы.*

Одним из основных шагов в доказательстве теоремы служит интегральное представление многочленов из $V_{l,m}$:

$$f(z) = \int_Z K_{l,m}(z,\zeta) F(\zeta)\, d\zeta,$$

здесь $F$ – обобщенная функция на группе $Z$, сосредоточенная в единице группы, в этой точке $c=0$, $s=0$, $t=0$. Ядро $K_{l,m}(z,\zeta)$ есть

$$K_{l,m}(z,\zeta) = (1 - sJv + \widehat{a}c)^l (1 - uJt + \widehat{c}a)^m,$$

где $z$ и $\zeta$ имеют параметры, см. (1), $c$, $s$, $t$ и $a$, $u$, $v$, соответственно, $J$ обозначает диагональную матрицу порядка $n-2$ с диагональю $\{-1,1,\ldots,1\}$. Таким образом, ядро $K_{l,m}(z,\zeta)$ служит *производящей функцией* для многочленов из $V_{l,m}$. В частности, дельта-функция $\delta(z)$, сосредоточенная в точке $E$, переходит в единицу.

Этот результат обобщает работу [1], где рассматривались представления $T_{l,m}$ с $l=m$, такие представления используются при изучении полиномиального квантования на пара-эрмитовом пространстве $G/H$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волотова Н.Б.* Индикаторные системы для представлений вырожденных серий линейной группы // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. 2007. Т. 12. Вып. 4. С. 430–432.

2. *Желобенко Д.П.* Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970.

Abstract: We present systems of differential equations to describe spaces of finite dimensional representations of the group $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ acting on polynomials on the Heisenberg group of dimension $2n-3$.

Keywords: symmetric spaces; finite dimensional representations; generating functions.

Волотова Надежда Борисовна
к. ф.-м. н., доцент
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: molchano@molchano.tstu.ru

Nadezhda Volotova
candidate of phys.-math. sciences,
senior lecturer
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: molchano@molchano.tstu.ru