Подставив (3.3), (3.4) в (3.2), получим требуемую формулу (3.1). $\square$

УДК 517.98

Конечномерный анализ на комплексном гиперболоиде [3]

© О. В. Гришина

Ключевые слова: комплексный гиперболоид, представления, сферические функции, гармонические многочлены

Исследован конечномерный анализ на комплексном гиперболоиде в $\mathbb{C}^3$, он связан с разложением на неприводимые составляющие тензорных произведений конечномерных представлений группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Finite dimensional analysis on the complex hyperboloid in $\mathbb{C}^3$ is investigated, it is related to decomposition into irreducible constituents of the tensor products of finite dimensional representations of the group $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

В этой работе мы переносим на *комплексный* гиперболоид результаты работы [2] о конечномерном анализе для *вещественного* гиперболоида в трехмерном пространстве. Этот анализ связан с разложением на неприводимые составляющие тензорного произведения произвольного неприводимого конечномерного представления группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ и его контраградиентного. Такие тензорные произведения реализуются в многочленах на гиперболоиде. Мы находим действие соответствующих сплетающих операторов (преобразований Пуассона и Фурье), вычисляем сферические функции и устанавливаем "формулу Планшереля".

§ 1. Представления группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

Приведем некоторые факты о представлениях группы $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, см., например, [1]. Группа G состоит из комплексных матриц

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{1.1}$$

[3]Работа поддержана грантами: РФФИ 07-01-91209 ЯФ_а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом 1.5.07.

Для такой матрицы g обозначим через $\widehat{g}$ матрицу, получающуюся перестановкой α с δ и β с γ:

$$\widehat{g} = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Соответствие $g \mapsto \widehat{g}$ есть инволютивный изоморфизм группы G на себя. Его можно получить так: $\widehat{g} = IgI$, где I

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нам потребуются подгруппы Z, H, N группы G, состоящие соответственно из матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G состоит из из комплексных матриц X со следом 0. Алгебра $\mathfrak{g}$ есть прямая сумма $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$, где подалгебры $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}$ состоят соответственно из матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы будем использовать два дробно-линейных действия группы G на комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$z \mapsto \widetilde{z} = z \cdot g = \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}, \quad z \mapsto \widehat{z} = z \cdot \widehat{g} = \frac{\delta z + \beta}{\gamma z + \alpha}.$$

Пусть l –целое или полуцелое неотрицательное число, т. е. $2l \in \mathbb{N}$. Мы обозначаем $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Пусть V_l – пространство многочленов $\varphi(z)$ от z степени $\leqslant 2l$, а $\overline{V}_l$ – пространство многочленов $\psi(\overline{z})$ от $\overline{z}$ степени $\leqslant 2l$. Одночлены $1, z, \ldots, z^{2l}$ и $1, \overline{z}, \ldots, \overline{z}^{2l}$ образуют базисы в V_l и $\overline{V}_l$, соответственно, так что размерность обоих этих пространств равна $2l+1$. Аналитическое представление π_l группы G действует в пространстве V_l по формуле

$$(\pi_l(g)\varphi)(z) = \varphi(z \cdot g)(\beta z + \delta)^{2l},$$

Антианалитическое представление $\overline{\pi}_l$ группы G действует в пространстве $\overline{V}_l$ по формуле

$$(\overline{\pi}_l(g)\psi)(\overline{z}) = \psi(\overline{z \cdot g})(\overline{\beta}\overline{z} + \overline{\delta})^{2l},$$

Пусть теперь $2l_1$, $2l_2 \in \mathbb{N}$. Представление $\pi_{l_1,l_2} = \pi_{l_1} \otimes \overline{\pi}_{l_2}$ действует в пространстве $V_{l_1,l_2} = V_{l_1} \otimes \overline{V}_{l_2}$, состоящем из многочленов $f(z, \overline{z})$ двух переменных z и $\overline{z}$ степени $\leqslant 2l_1$ и $\leqslant 2l_2$, соответственно, по формуле

$$(\pi_{l_1,l_2}(g)f)(z, \overline{z}) = f(z \cdot g, \overline{z \cdot g})(\beta z + \delta)^{2l_1}(\overline{\beta}\overline{z} + \overline{\delta})^{2l_2}.$$

Следовательно, $\pi_l = \pi_{l,0}$, $\overline{\pi}_l = \pi_{0,l}$. Базис в V_{l_1,l_2} состоит из одночленов $\{z^k \overline{z}^m\}$, где $0 \leqslant k \leqslant 2l_1$, $0 \leqslant m \leqslant 2l_2$, так что $\dim V_{l_1,l_2} = (2l_1 + 1)(2l_2 + 1)$.

Вместе с представлениями π_{l_1,l_2} рассмотрим представления $\widehat{\pi}_{l_1,l_2}$ (контраградиентные представления):

$$\widehat{\pi}_{l_1,l_2}(g) = \pi_{l_1,l_2}(\widehat{g}).$$

Все представления π_{l_1,l_2} и $\widehat{\pi}_{l_1,l_2}$ неприводимы. Всякое неприводимое представление группы G эквивалентно одному из π_{l_1,l_2}. В частности, представление $\widehat{\pi}_{l_1,l_2}$ эквивалентно представлению π_{l_1,l_2} – с помощью оператора $\pi_{l_1,l_2}(I)$, т. е. перехода от $f(z,\overline{z})$ к инверсной функции $\widehat{f}(z,\overline{z}) = f(1/z, 1/\overline{z})z^{2l_1}\overline{z}^{2l_2}$.

В пространстве V_l одночлены 1 и z^{2l} являются соответственно минимальным и максимальным векторами относительно представления π_l, т. е. аннулируются соответственно подалгебрами $\mathfrak{z}$ и $\mathfrak{n}$, относительно представления $\widehat{\pi}_l$ таковыми являются одночлены z^{2l} и 1. Следовательно, в пространстве V_{l_1,l_2} одночлены 1 и $z^{2l_1}\overline{z}^{2l_2}$ являются соответственно минимальным и максимальным векторами относительно представления π_{l_1,l_2} и максимальным и минимальным векторами относительно представления $\widehat{\pi}_{l_1,l_2}$. Все эти одночлены являются собственными векторами для подгруппы H. Для представлений π_l и $\widehat{\pi}_l$ инвариант относительно H в пространстве V_l существует при *целом* l, это – одночлен

$$\theta_l(z) = z^l, \tag{1.2}$$

следовательно, для представлений π_{l_1,l_2} и $\widehat{\pi}_{l_1,l_2}$ инвариант относительно H в пространстве V_{l_1,l_2} существует при *целых* l_1, l_2, это – одночлен

$$\theta_{l_1,l_2}(z,\overline{z}) = z^{l_1}\overline{z}^{l_2}. \tag{1.3}$$

Этот H-инвариант – единственный с точностью до множителя.

Представление π_l сохраняет следующую невырожденную билинейную форму A_l на V_l: на базисных элементах она задается формулой

$$A_l(z^m, z^p) = (-1)^m \binom{2l}{m}^{-1} \delta_{m,2l-p}, \tag{1.4}$$

такая форма – единственная с точностью до множителя. Наряду с ней рассмотрим форму

$$A'_l(\varphi,\psi) = A_l(\varphi,\widehat{\psi}),$$

так что

$$A'_l(z^m, z^p) = (-1)^m \binom{2l}{m}^{-1} \delta_{m,p}.$$

($\delta_{m,p}$ – дельта Кронекера). Форма A'_l инвариантна относительно *пары* $(\pi_l, \widehat{\pi}_l)$:

$$A'_l\big(\pi_l(g)\varphi, \widehat{\pi}_l(g)\psi\big) = A'_l(\varphi,\psi), \quad \varphi,\psi \in V_l, \quad g \in G.$$

Билинейные формы A_l и A'_l порождают билинейные формы (невырожденные) A_{l_1,l_2} и A'_{l_1,l_2} на V_{l_1,l_2}. На базисных элементах они даются формулами:

$$\begin{aligned} A_{l_1,l_2}(z^k\overline{z}^m, z^p\overline{z}^q) &= (-1)^{k+m}\binom{2l_1}{k}^{-1}\binom{2l_2}{m}^{-1}\delta_{p,2l-k}\delta_{q,2l-m}. \qquad (1.5) \\ A'_{l_1,l_2}(z^k\overline{z}^m, z^p\overline{z}^q) &= (-1)^{k+m}\binom{2l_1}{k}^{-1}\binom{2l_2}{m}^{-1}\delta_{p,k}\delta_{q,m}. \end{aligned}$$

Форма A_{l_1,l_2} инвариантна относительно π_{l_1,l_2}, а форма A'_{l_1,l_2} инвариантна относительно пары $(\pi_{l_1,l_2}, \widehat{\pi}_{l_1,l_2})$, т. е.

$$A'_{l_1,l_2}\big(\pi_{l_1,l_2}(g)f, \widehat{\pi}_{l_1,l_2}(g)h\big) = A'_{l_1,l_2}(f,h), \quad f,h \in V_{l_1,l_2}, \quad g \in G.$$

§ 2. Тензорное произведение $\pi_l \otimes \widehat{\pi}_l$

В этом параграфе мы рассмотрим тензорное произведение аналитического представления и контраградиентного ему. Пусть $2l \in \mathbb{N}$. Пространство $W_l = V_l \otimes V_l$ состоит из многочленов $f(\xi,\eta)$ от двух переменных ξ, η степени $\leqslant 2l$ по каждой из них. Представление $R_l = \pi_l \otimes \widehat{\pi}_l$ группы G действует в W_l по формуле

$$R_l(g)f(\xi,\eta) = f(\widetilde{\xi}, \widehat{\eta})\big[(\beta\xi+\delta)(\gamma\eta+\alpha)\big]^{2l}.$$

Многочлен

$$N = N(\xi,\eta) = 1 - \xi\eta \tag{2.1}$$

обладает следующим свойством:

$$N(\widetilde{\xi}, \widehat{\eta}) = \frac{N(\xi,\eta)}{(\beta\xi+\delta)(\gamma\eta+\alpha)}.$$

Следовательно, многочлен

$$\Phi_l = N^{2l}$$

инвариантен относительно R_l:

$$R_l(g)\Phi_l = \Phi_l, \quad g \in G.$$

Для всякого $k_1 = 0, 1, \ldots, 2l$ многочлены

$$u_k = N^{2l-k}\eta^k, \quad v_k = N^{2l-k}\xi^k$$

являются минимальным и максимальным векторами, т. е. аннулируются соответственно подалгебрами $\mathfrak{z}$ и $\mathfrak{n}$, и являются собственными векторами для подгруппы H. Следовательно, каждый многочлен из пары u_k и v_k порождает неприводимое подпространство $W_l^{(k)}$ в W_l, в котором действует представление π_k. Получаем разложение на неприводимые компоненты представления:

$$R_l = \pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_{2l}$$

и пространства:

$$W_l = W_l^{(0)} + W_l^{(1)} + \ldots + W_l^{(2l)}, \tag{2.2}$$

где

$$W_l^{(k)} = N^{2l-k}W_{k/2}^{(k)}.$$

Возьмем на W_l билинейную форму B_l, которая есть "тензорный квадрат" формы A'_l, а именно, для чистых тензоров полагаем

$$B_l(\varphi \otimes \psi, \varphi_1 \otimes \psi_1) = A'_l(\varphi, \psi_1) A'_l(\psi, \varphi_1),$$

так что

$$B_l(\xi^k \eta^m,\ \xi^m \eta^k) = (-1)^{k+m} \binom{2l}{k}^{-1} \binom{2l}{m}^{-1}$$

и B_l равна нулю на других парах базисных элементов $\xi^k \eta^m$. Форма B_l инвариантна относительно R_l:

$$B_l(R_l(g) f_1, R_l(g) f_2) = B_l(f_1, f_2).$$

Подпространства $W_l^{(k)}$ ортогональны относительно B_l. Обозначим

$$\mu_{lk} = B_l(u_k, v_k). \tag{2.3}$$

Вычисление дает

$$\mu_{lk} = (-1)^k \frac{k!^2 (2l-k)!(2l+k+1)!}{(2k+1)!(2l)!^2}. \tag{2.4}$$

Аналогично исследуется тензорное произведение антианалитического представления и контраградиентного ему.

§ 3. Тензорное произведение $\pi_{l_1,l_2} \otimes \widehat{\pi}_{l_1,l_2}$

В этом параграфе мы рассмотрим тензорное произведение произвольного неприводимого конечномерного представления и контраградиентного ему. Пусть $2l_1,\ 2l_2 \in \mathbb{N}$. Пространство $W_{l_1,l_2} = V_{l_1,l_2} \otimes V_{l_1,l_2}$ состоит из многочленов $f(\xi, \eta, \overline{\xi}, \overline{\eta})$ от переменных $\xi,\ \eta$ степени $\leqslant 2l_1$ по каждой из них и переменных $\overline{\xi},\ \overline{\eta}$ степени $\leqslant 2l_2$ по каждой из них. Представление $R_{l_1,l_2} = \pi_{l_1,l_2} \otimes \widehat{\pi}_{l_1,l_2}$ группы G действует в пространстве $W_{l_1,l_2} = V_{l_1,l_2} \otimes V_{l_1,l_2}$ по формуле

$$\begin{aligned} R_{l_1,l_2}(g) f(\xi, \eta, \overline{\xi}, \overline{\eta}) &= f(\xi \cdot g, \eta \cdot \widehat{g}, \overline{\xi \cdot g}, \overline{\eta \cdot \widehat{g}}) \big[(\beta\xi + \delta)(\gamma\eta + \alpha)\big]^{2l_1} \times \\ &\times \big[(\overline{\beta\xi} + \overline{\delta})(\overline{\gamma\eta} + \overline{\alpha})\big]^{2l_2}. \end{aligned}$$

Многочлен

$$\Phi_{l_1,l_2} = N^{2l_1} \overline{N}^{2l_2}$$

инвариантен относительно R_{l_1,l_2}:

$$R_{l_1,l_2}(g) \Phi_{l_1,l_2} = \Phi_{l_1,l_2}. \tag{3.1}$$

Для всяких $k_1 = 0, 1, \ldots, 2l_1$ и $k_2 = 0, 1, \ldots, 2l_2$ многочлены

$$u_{k_1,k_2} = N^{2l_1-k_1} \overline{N}^{2l_2-k_2} \eta^{k_1} \overline{\eta}^{k_2}, \quad v_{k_1,k_2} = N^{2l_1-k_1} \overline{N}^{2l_2-k_2} \xi^{k_1} \overline{\xi}^{k_2}$$

являются минимальным и максимальным векторами. Следовательно, каждый многочлен из этих двух многочленов порождает неприводимое подпространство

$W_{l_1,l_2}^{(k_1,k_2)}$ в W_{l_1,l_2}, в котором действует представление π_{k_1,k_2}. Получаем разложение представления R_{l_1,l_2} на неприводимые компоненты (свободное от кратностей):

$$R_{l_1,l_2} = \sum \pi_{k_1,k_2},$$

где суммирование ведется по $0 \leqslant k_1 \leqslant 2l_1$, $0 \leqslant k_2 \leqslant 2l_2$.

Возьмем в W_{l_1,l_2} билинейную инвариантную форму B_{l_1,l_2}, которая есть "тензорный квадрат" формы A'_{l_1,l_2}, а именно, для чистых тензоров полагаем

$$B_{l_1,l_2}(f \otimes h, u \otimes v) = A'_{l_1,l_2}(f,v) A'_{l_1,l_2}(h,u),$$

поэтому

$$\begin{aligned} &B_{l_1,l_2}(\xi^{k_1}\bar{\xi}^{k_2}\eta^{m_1}\bar{\eta}^{m_2},\ \xi^{m_1}\bar{\xi}^{m_2}\eta^{k_1}\bar{\eta}^{k_2}) = \\ &= (-1)^{k_1+k_2+m_1+m_2} \binom{2l_1}{k_1}^{-1} \binom{2l_2}{k_2}^{-1} \binom{2l_1}{m_1}^{-1} \binom{2l_2}{m_2}^{-1} \end{aligned}$$

и B_{l_1,l_2} обращается в нуль на других парах базисных элементов $\xi^{k_1}\bar{\xi}^{k_2}\eta^{m_1}\bar{\eta}^{m_2}$. Форма B_{l_1,l_2} инвариантна относительно R_{l_1,l_2}:

$$B_{l_1,l_2}(R_{l_1,l_2}(g)u, R_{l_1,l_2}(g)v) = B_{l_1,l_2}(u,v).$$

Обозначим

$$\mu_{l_1,l_2,k_1,k_2} = B_{l_1,l_2}(u_{k_1,k_2}, v_{k_1,k_2}). \tag{3.2}$$

Это число выражается через μ_{lk}, см. (2.3), (2.4):

$$\mu_{l_1,l_2,k_1,k_2} = \mu_{l_1,k_1} \cdot \mu_{l_2,k_2}. \tag{3.3}$$

§ 4. Гиперболоид

Введем в $\mathbb{C}^3$ билинейную форму

$$[x,y] = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \tag{4.1}$$

Обозначим через $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}$, гиперболоид $[x,x] = 1$ и конус $[x,x] = 1$, $x \neq 0$, соответственно. Многообразие $\mathcal{X}$ может быть реализовано как множество матриц

$$x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_2 + x_1 & 1 + x_3 \end{pmatrix}$$

с определителем равным нулю. Группа G действует в пространстве матриц $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ следующим образом: $x \to g^{-1}xg$. На гиперболоиде $\mathcal{X}$ она действует транзитивно. Стационарная подгруппа точки

$$x^0 = (0,0,1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

есть подгруппв H. Действие группы G на функции f на $\mathcal{X}$ сдвигами обозначим через U:

$$U(g)f(x) = f(g^{-1}xg), \quad g \in G. \tag{4.2}$$

Введем на $\mathcal{X}$ орисферические координаты ξ, η:

$$x = N^{-1}(\xi + \eta, \xi - \eta, 1 + \xi\eta),$$

см. (2.1) для N, отсюда

$$\frac{1}{N} = \frac{x_3 + 1}{2},$$

в матричном виде получим:

$$x = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} -\xi\eta & -\eta \\ \xi & 1 \end{pmatrix},$$

Эти координаты определены всюду на $\mathcal{X}$, за исключением $x_3 = -1$. Действие $x \to g^{-1}xg$ группы G задается дробно-линейным преобразованием отдельно по каждой переменной ξ и η:

$$\xi \to \widetilde{\xi} = \xi \cdot g, \quad \eta \to \widehat{\eta} = \eta \cdot \widehat{g},$$

поэтому $U(g)f(\xi, \eta) = f(\tilde{\xi}, \widehat{\eta})$. Начальная точка x^0 имеет координаты $\xi = 0$, $\eta = 0$. Элемент g, см. (1.1), переводит x^0 в точку с координатами

$$\xi = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \eta = \frac{\beta}{\alpha}, \tag{4.3}$$

так что

$$N = \frac{1}{\alpha\delta}. \tag{4.4}$$

На $\mathcal{X}$ имеется два оператора Лапласа Δ и $\overline{\Delta}$ (образующие в алгебре дифференциальных операторов, инвариантных относительно G), где

$$\Delta = N^2 \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} \ .$$

Обозначим через $\mathcal{A}$ и $\overline{\mathcal{A}}$ пространства аналитических и антианалитических многочленов в $\mathbb{C}^3$, соответственно. Многочлен f из $\mathcal{A}$ назовем *гармоническим* (относительно (4.1)), если

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) f = 0.$$

Обозначим через $\mathcal{H}$ пространство гармонических многочленов и через $\overline{\mathcal{H}}$ – соответствующее подпространство в $\overline{\mathcal{A}}$. Многочлены из тензорного произведения $\mathcal{H} \otimes \overline{\mathcal{H}}$ назовем *би-гармоническими*. Обозначим через $\mathcal{H}_{k_1,k_2}$ подпространство в $\mathcal{H} \otimes \overline{\mathcal{H}}$, состоящее из однородных многочленов степени k_1 по z и степени k_2 по $\overline{z}$. Ограничения пространств $\mathcal{H} \otimes \overline{\mathcal{H}}$ и $\mathcal{H}_{k_1,k_2}$ на $\mathcal{X}$ обозначим через $(\mathcal{H} \otimes$

$\overline{\mathcal{H}})(\mathcal{X})$ и $\mathcal{H}_{k_1,k_2}(\mathcal{X})$, соответственно. Это отображение ограничения – взаимно однозначное соответствие.

Кроме того, пространство $(\mathcal{H}\otimes\overline{\mathcal{H}})(\mathcal{X})$ совпадает с пространством ограничений на $\mathcal{X}$ *всех* многочленов на $\mathbb{C}^3$.

Пространство $\mathcal{H}_{k_1k_2}(\mathcal{X})$ инвариантно и неприводимо относительно представления U, см. (4.2), соответствующее представление эквивалентно представлению π_{k_1,k_2}. Многочлены из этого пространства являются собственными для операторов Лапласа:

$$\Delta f = k_1(k_1+1)f, \quad \overline{\Delta} f = k_2(k_2+1)f.$$

Обозначим

$$\mathcal{M}_{m_1,m_2} = \sum_{i=0}^{m_1}\sum_{j=0}^{m_2}\mathcal{H}_{i,j}(\mathcal{X}) \tag{4.5}$$

Вспомним представление R_{l_1,l_2} и пространство W_{l_1,l_2} из § 3. Разделим все многочлены f из W_{l_1,l_2} на Φ_{l_1,l_2}. Мы получим пространство $\Phi_{l_1,l_2}^{-1}W_{l_1,l_2}$ рациональных функций от $\xi, \overline{\xi}, \eta, \overline{\eta}$.

Из (3.1) следует, что отображение $\mathcal{L} : f \mapsto \Phi_{l_1,l_2}^{-1} f$ сплетает R_{l_1,l_2} и ограничение представления U на $\Phi_{l_1,l_2}^{-1}W_{l_1,l_2}$.

Теорема 4.1 $\Phi_{l_1,l_2}^{-1}W_{l_1,l_2} = \mathcal{M}_{2l_1,2l_2}$.

Доказательство. В силу (4.5) и (2.2) достаточно указать в $\Phi_{l_1,l_2}^{-1}W_{l_1,l_2}$ хотя бы один элемент из $\mathcal{H}_{k_1,k_2}$ для всех $k_1 = 0,1,\ldots,2l_1$, $k_2 = 0,1,\ldots,2l_2$. Таким элементом является минимальный вектор

$$\Phi_{l_1,l_2}^{-1}u_{k_1,k_2} = \left(\frac{\eta}{N}\right)^{k_1}\left(\frac{\overline{\eta}}{\overline{N}}\right)^{k_2} = \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^{k_1}\left(\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{2}\right)^{k_2},$$

см. (3.4), поскольку он принадлежит $\mathcal{H}_{k_1,k_2}$. $\Box$

§ 5. Преобразование Пуассона. Аналитический случай

Перенесем билинейную форму B_l из пространства W_l в пространство $\mathcal{M}_{2l} = \mathcal{M}_{2l,0}$ с помощью оператора $\mathcal{L}$, и сохраним для новой формы то же обозначение, так что

$$B_l(\Phi_l^{-1}\xi^j\eta^m,\ \Phi_l^{-1}\xi^m\eta^j) = (-1)^{j+m}\binom{2l}{j}^{-1}\binom{2l}{m}^{-1},$$

форма B_l равна нулю для других пар базисных элементов $\Phi_l^{-1}\xi^j\eta^m$, где $j,m \leqslant 2l$.

Напишем операторы, сплетающие представление π_k и представление U, действующее на $\mathcal{M}_{2l}$ $(k \leqslant 2l)$.

Ядро Пуассона, соответствующее H-инварианту θ_k, см. (1.2), определяется по формуле:

$$P_k(x;z) = P_k(\xi,\eta;z) = (\pi_k(g^{-1})\theta_k)(z),$$

где ξ, η – орисферические координаты точки $x = g^{-1}x^0g$. Его явное выражение таково:

$$P_k(\xi,\eta;z) = \left[\frac{(z-\xi)(1-\xi z)}{N}\right]^k \tag{5.1}$$

или

$$P_k(\xi,\eta;z) = [x,y]^k,$$

где y – точка конуса $\mathcal{X}_0$:

$$y = \left(\frac{z^2+1}{2}, \frac{z^2-1}{2}, z\right).$$

Преобразование Пуассона $\mathcal{P}_k : V_k \to \mathcal{M}_{2l}$ определяется следующим образом:

$$(\mathcal{P}_k\varphi)(\xi,\eta) = A_k(\pi_k(g^{-1})\theta_k, \varphi) \tag{5.2}$$

где A_k – билинейная форма (1.4) на V_k. Оно сплетает π_k и U:

$$\mathcal{P}_k\pi_k(g) = U(g)\mathcal{P}_k.$$

Следовательно, по (4.5) его образ есть $\mathcal{H}_k(\mathcal{X}) = \mathcal{H}_{k,0}(\mathcal{X})$. Обозначим

$$F_{k,m} = (-1)^k\mathcal{P}_k z^m. \tag{5.3}$$

По (5.1), (5.2) и (1.4) имеем

$$F_{k,m}(\xi,\eta) = N^{-k}\binom{2k}{m}^{-1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{k}{m-j}\xi^{m-j}\eta^{k-j}. \tag{5.4}$$

В частности, получаем минимальный и максимальный векторы:

$$F_{k,0} = \left(\frac{\eta}{N}\right)^k = \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^k, \quad F_{k,2k} = \left(\frac{\xi}{N}\right)^k = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^k.$$

Заметим, что $F_{k,m}(\xi,\eta) = F_{k,2k-m}(\eta,\xi)$. Поскольку $\mathcal{H}_k(\mathcal{X})$ неприводимо, значения формы B_l на базисе $F_{k,m}$ отличаются от значений формы A_k на базисе z^m только множителем, который в силу (2.3) равен μ_{lk}, см. (2.4), так что по (1.4) получаем

$$B_l(F_{k,m}, F_{k,2k-m}) = (-1)^m\binom{2k}{m}^{-1}\mu_{lk}. \tag{5.5}$$

Теперь мы можем переписать ядро Пуассона (5.1) следующим образом:

$$P_k(\xi,\eta;z) = \sum_{j=0}^{2k}(-1)^{k+j}\binom{2k}{j}F_{k,2k-j}(\xi,\eta)\,z^j, \tag{5.6}$$

при фиксированном z это есть элемент из $\mathcal{H}_k(\mathcal{X})$.

Определим *преобразование Фурье* $\mathcal{F}_k : \mathcal{M}_{2l} \to V_k$:

$$(\mathcal{F}_k F)(z) = B_l(P_k(\,\cdot\,; z), F(\,\cdot\,)).$$

Используя (5.6), получаем

$$(\mathcal{F}_k F)(z) = \sum_{j=0}^{2k} (-1)^{k+j} \binom{2k}{j} B_l(F_{k,2k-j}, F)\, z^j. \tag{5.7}$$

Преобразование Фурье $\mathcal{F}_k$ сплетает U и π_k и является сопряженным к преобразованию Пуассона:

$$B_l(F, \mathcal{P}_k \varphi) = A_k(\mathcal{F}_k F, \varphi), \tag{5.8}$$

где $\varphi \in V_l$, $F \in \mathcal{M}_{2l}$; композиция этих двух преобразований есть скалярный оператор:

$$\mathcal{F}_k \mathcal{P}_k = \mu_{l,k} E,$$

эти свойства получаются из (5.7) и свойств преобразования Пуассона.

Следовательно, если $F \in \mathcal{H}_k(\mathcal{X})$, то

$$B_l(F, F) = \mu_{l,k}^{-1} A_k(\mathcal{F}_k F, \mathcal{F}_k F),$$

а для произвольного $F \in \mathcal{M}_{2l}$ имеем

$$B_l(F, F) = \sum_{k=0}^{2l} \mu_{l,k}^{-1} A_k(\mathcal{F}_k F, \mathcal{F}_k F).$$

Эту формулу можно рассматривать как формулу Планшереля, мерой Планшереля служит $\mu_{l,k}^{-1}$.

Под действием преобразования Пуассона H-инвариант θ_k переходит в сферическую функцию:

$$\Psi_k = \mathcal{P}_k \theta_k. \tag{5.9}$$

По (5.3) имеем $\Psi_k = (-1)^k F_{k,k}$, поэтому

$$\begin{aligned} \Psi_k(x) &= (-1)^k N^{-k} \binom{2k}{k}^{-1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 (\xi\eta)^{k-j} \\ &= (-1)^k \binom{2k}{k}^{-1} P_k(x_3), \end{aligned}$$

где $P_k(t)$ – многочлен Лежандра. Сферическая функция инвариантна относительно H. Ее можно рассматривать как "обобщенную функцию действующую на $F \in \mathcal{M}_{2l}$: в самом деле, из (5.9) и (5.8) получаем

$$B_l(\Psi_k, F) = A_k(\theta_k, \mathcal{F}_k F).$$

Сдвинутая сферическая функция $U(g^{-1})\Psi_{k_1,k_2}$ есть аналог ядра Бергмана:

$$U(g^{-1})\Psi_k(u, v) = \sum_{j=0}^{2k} (-1)^{j+q} \binom{2k_1}{j} \cdot F_{k,j}(u, v) F_{k,2k-j}(\xi, \eta), \tag{5.10}$$

где ξ, η – орисферические координаты точки $x = g^{-1}x^0 g$.

Определим для всякой H-инвариантной функции $Q \in \mathcal{M}_{2l}$ свертку с Q, это следующий оператор $F \mapsto Q \star F$ в $\mathcal{M}_{2l}$:

$$(Q \star F)(\xi, \eta) = B_l(U(g^{-1})Q, F).$$

В частности, свертка с функцией Φ_l^{-1} – единичный оператор, поэтому Φ_l^{-1} играет роль дельта-функции. Сдвинутая функция $U(g^{-1})\Phi_l^{-1}$ – следующая функция от двух пар переменных (назовем ее ядром Березина):

$$K_l(\xi, \eta; u, v) = \Big[\frac{(1-u\eta)(1-\xi v)}{(1-\xi\eta)(1-uv)}\Big]^{2l}$$

или, в терминах точек гиперболоида,

$$K_l(x, y) = \left(\frac{[x, y]+1}{2}\right)^{2l}.$$

Таким образом, ядро K_l обладает воспроизводящим свойством:

$$B_l(K_l(z;\ \cdot\ ), F(\ \cdot\ )) = F(z), \quad F \in \mathcal{M}_{2l}.$$

Для сферической функции Ψ_k свертка с $\mu_{l,k}^{-1}\Psi_k$ является проектированием в $\mathcal{M}_{2l}$ на $\mathcal{H}_k(\mathcal{X})$ (это следует из (5.7) и (5.10)).

Следовательно, мы получаем разложение:

$$\Phi_l^{-1} = \sum_{k=0}^{2l} \mu_{l,k}^{-1}\Psi_k.$$

Эту формулу тоже можно рассматривать как формулу Планшереля.

С точки зрения спецфункций эта формула эквивалентна разложению по многочленам Лежандра:

$$\left(\frac{t+1}{2}\right)^L = \sum_{k=0}^{L}(2k+1)\frac{(L!)^2}{(L-k)!(L+k+1)!}\ P_k(t).$$

Для преобразования Пуассона мы можем написать *дифференциальную* формулу:

$$(\mathcal{P}_k\varphi)(\xi, \eta) = c_k(-1)^k\Big(\frac{d}{dz}\Big)^k\Big|_{z=0}\varphi\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right)(\beta z+\delta)^{2k}, \tag{5.11}$$

где $c_k = k!/(2k)!$, а ξ, η – орисферические координаты точки $x = g^{-1}x^0 g$.

Достаточно доказать эту формулу для базисных функций z^m:

$$(\mathcal{P}_k z^m)(\xi, \eta) = c_k(-1)^k\Big(\frac{d}{dz}\Big)^k\Big|_{z=0}(\alpha z+\gamma)^m(\beta z+\delta)^{2k-m}.$$

Последняя формула следует из (5.3), (5.4), (4.3), (4.4).

§ 6. Преобразование Пуассона. Общий случай

В этом параграфе мы действуем по схеме § 5 и используем обозначения из § 5. Перенесем билинейную форму B_{l_1,l_2} из пространства W_{l_1,l_2} в пространстве $\mathcal{M}_{2l_1,2l_2}$ с помощью оператора $\mathcal{L}$, и сохраним для новой формы то же обозначение, так что

$$B_{l_1,l_2}(\Phi^{-1}\xi^{k_1}\bar{\xi}^{k_2}\eta^{m_1}\bar{\eta}^{m_2},\ \Phi^{-1}\xi^{m_1}\bar{\xi}^{m_2}\eta^{k_1}\bar{\eta}^{k_2}) =$$
$$= (-1)^{k_1+k_2+m_1+m_2}\binom{2l_1}{k_1}^{-1}\binom{2l_2}{k_2}^{-1}\binom{2l_1}{m_1}^{-1}\binom{2l_2}{m_2}^{-1},$$

форма B_{l_1,l_2} равна нулю для других пар базисных элементов.

Ядро Пуассона, соответствующее H-инварианту θ_{k_1,k_2}, см. (1.3), определяется по формуле:

$$P_{k_1,k_2}(\xi,\eta,\bar{\xi},\bar{\eta};z,\bar{z}) = (\pi_{k_1,k_2}(g^{-1})\theta_{k_1,k_2})(z,\bar{z})$$

где ξ,η – орисферические координаты точки $x = g^{-1}x^0 g$. Его явное выражение таково:

$$P_{k_1,k_2}(\xi,\eta,\bar{\xi},\bar{\eta};z,\bar{z}) = \left[\frac{(z-\xi)(1-\xi\eta)}{N}\right]^{k_1}\left[\frac{(\bar{z}-\bar{\xi})(1-\overline{z\eta})}{\overline{N}}\right]^{k_2}$$

или

$$P_{k_1,k_2}(x,\bar{x};z,\bar{z}) = [x,y]^{k_1}[\bar{x},\bar{y}]^{k_2},$$

где y – точка конуса из § 5.

Преобразование Пуассона $\mathcal{P}_{k_1,k_2} : V_{k_1,k_2} \to \mathcal{M}_{2l_1,2l_2}$ определяется следующим образом:

$$(\mathcal{P}_{k_1,k_2}\varphi)(\xi,\eta,\bar{\xi},\bar{\eta}) = A_{k_1,k_2}(\pi_{k_1,k_2}(g^{-1})\theta_{k_1,k_2},\varphi)$$

где A_{k_1,k_2} – билинейная форма (1.5) на V_{k_1,k_2}. Оно сплетает π_{k_1,k_2} и U. Следовательно, по (4.5) его образ есть $\mathcal{H}_{k_1,k_2}(\mathcal{X})$.

Обозначим:

$$F_{k_1,k_2,m_1,m_2} = (-1)^{k_1+k_2}\mathcal{P}_{k_1,k_2} z^{m_1}\bar{z}^{m_2}$$

Имеем

$$F_{k_1,k_2,m_1,m_2}(\xi,\eta,\bar{\xi},\bar{\eta}) = F_{k_1,m_1}(\xi,\eta)\cdot F_{k_2,m_2}(\bar{\xi},\bar{\eta}).$$

В частности, получаем минимальный и максимальный векторы:

$$F_{k_1,k_2,0,0} = F_{k_1,0}\overline{F_{k_2,0}},\quad F_{k_1,k_2,2k_1,2k_2} = F_{k_1,2k_1}\overline{F_{k_2,2k_2}}.$$

Поскольку $\mathcal{H}_{k_1,k_2}(\mathcal{X})$ неприводимо, значения формы B_{l_1,l_2} на базисе F_{k_1,k_2,m_1,m_2} отличаются от значений формы A_{k_1,k_2} на базисе $z^{m_1}\bar{z}^{m_2}$ только множителем, который в силу (3.2) равен μ_{l_1,l_2,k_1,k_2}, см. (3.3), так что по (1.5) получаем

$$B_{l_1,l_2}(F_{k_1,k_2,m_1,m_2},F_{k_1,k_2,2k_1-m_1,2k_2-m_2}) = (-1)^{m_1+m_2}\binom{2k_1}{m_1}^{-1}\binom{2k_2}{m_2}^{-1}.$$

Теперь мы можем переписать ядро Пуассона следующим образом (см. (5.6)):

$$P_{k_1,k_2}(\xi,\eta,\overline{\xi},\overline{\eta};z,\overline{z}) = P_{k_1}(\xi,\eta;z)P_{k_2}(\overline{\xi},\overline{\eta};\overline{z})$$

Определим *преобразование Фурье* $\mathcal{F}_{k_1,k_2} : \mathcal{M}_{2l_1,2l_2} \to V_{k_1,k_2}$:

$$(\mathcal{F}_{k_1,k_2}F)(z,\overline{z}) = B_{l_1,l_2}(P_{k_1,k_2}(\,\cdot\,;z,\overline{z}),F)$$

Подставляя ядро Пуассона, получим

$$(\mathcal{F}_{k_1,k_2}F)(z,\overline{z}) = \sum_{j=0}^{2k_1}\sum_{q=0}^{2k_2}(-1)^{k_1+k_2+j+q}\binom{2k_1}{j}\binom{2k_2}{q}B_{l_1,l_2}(F_{k_1,k_2,2k_1-j,2k_2-q},F)\,z^j\overline{z}^q.$$

Преобразование Фурье $\mathcal{F}_{k_1,k_2}$ сплетает U и π_{k_1,k_2} и является сопряженным преобразованию Пуассона:

$$B_{l_1,l_2}(F,\mathcal{P}_{k_1,k_2}\varphi) = A_{k_1,k_2}(\mathcal{F}_{k_1,k_2}F,\varphi),$$

где $\varphi \in V_{l_1,l_2}$, $F \in \mathcal{M}_{2l_1,2l_2}$. Композиция этих двух операторов есть скалярный оператор:

$$\mathcal{F}_{k_1,k_2}\mathcal{P}_{k_1,k_2} = \mu_{l_1,l_2,k_1,k_2}E.$$

Для произвольного $F \in \mathcal{M}_{2l_1,2l_2}$ имеем

$$B_{l_1,l_2}(F,F) = \sum_{k_1=0}^{2l_1}\sum_{k_2=0}^{2l_2}\mu^{-1}_{l_1,l_2,k_1,k_2}A_{k_1,k_2}(\mathcal{F}_{k_1,k_2}F,\mathcal{F}_{k_1,k_2}F).$$

Эту формулу можно рассматривать как формулу Планшереля, мерой Планшереля служит $\mu^{-1}_{l_1,l_2,k_1,k_2}$.

Под действием преобразования Пуассона H-инвариант θ_{k_1,k_2} переходит в сферическую функцию:

$$\Psi_{k_1,k_2} = \mathcal{P}_{k_1,k_2}\theta_{k_1,k_2}.$$

Имеем $\Psi_{k_1,k_2} = (-1)^{k_1+k_2}F_{k_1,k_2,k_1,k_2}$, поэтому

$$\Psi_{k_1,k_2}(x) = (-1)^{k_1+k_2}\binom{2k_1}{k_1}^{-1}\binom{2k_2}{k_2}^{-1}P_{k_1}(x_3)P_{k_2}(\overline{x}_3)$$

где $P_k(t)$ – многочлен Лежандра. Сферическая функция инвариантна относительно H. Ее можно рассматривать как "обобщенную функцию действующую на многочлены $F \in \mathcal{M}_{2l_1,2l_2}$:

$$B_{l_1,l_2}(\Psi_{k_1,k_2},F) = A_{k_1,k_2}(\theta_{k_1,k_2},\mathcal{F}_{k_1,k_2}F).$$

Определим для всякой H-инвариантной функции $Q \in \mathcal{M}_{2l_1,2l_2}$ свертку с Q, это следующий оператор $F \mapsto Q \star F$ в $\mathcal{M}_{2l_1,2l_2}$:

$$(Q \star F)(\xi,\eta,\overline{\xi},\overline{\eta}) = \mathcal{B}_{l_1,l_2}(U(g^{-1})Q,F),$$

где ξ,η – орисферические координаты точки $x = g^{-1}x^0g$.

В частности, свертка с функцией $\Phi^{-1}_{l_1,l_2}$ – единичный оператор, поэтому $\Phi^{-1}_{l_1,l_2}$ играет роль дельта-функции. Сдвинутая функция $U(g^{-1})\Phi^{-1}_{l_1,l_2}$ (назовем ее ядром Березина) есть (см. (5.11))

$$K_{l_1,l_2}(\xi,\eta,u,v;\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{u},\overline{v}) = K_{l_1}(\xi,\eta;u,v)K_{l_2}(\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{u},\overline{v}).$$

Ядро K_{l_1,l_2} обладает воспроизводящим свойством:

$$\mathcal{B}_{l_1,l_2}(K_{l_1,l_2}(z,\bar{z};\ \cdot\ ),F(\ \cdot\ )) = F(z,\overline{z}), \quad F\in\mathcal{M}_{2l_1,2l_2}.$$

Следовательно, получаем разложение:

$$\Phi^{-1}_{l_1,l_2} = \sum_{k_1=0}^{2l_1}\sum_{k_2=0}^{2l_2}\mu^{-1}_{l_1,l_2,k_1,k_2}\Psi_{k_1,k_2}$$

Эту формулу можно также считать аналогом формулы Планшереля.

Для преобразования Пуассона мы можем написать *дифференциальную* формулу:

$$(\mathcal{P}_{k_1,k_2}f)(\xi,\eta,\overline{\xi},\overline{\eta}) = c_{k_1,k_2}(-1)^{k_1+k_2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k_1}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^{k_2}\Big|_{z=0} f\big(\widetilde{z},\overline{\widetilde{z}}\big)(\beta z+\delta)^{2k_1}(\overline{\beta}\overline{z}+\overline{\delta})^{2k_2},$$

где $c_{k_1,k_2}=c_{k_1}c_{k_2}$, см. § 5, и ξ,η связаны с g формулами (1.1), (4.3).

Эта формула получается из формулы для базисных функций, которая доказывается аналогично соответствующей формуле из § 5:

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}_{k_1,k_2}z^{m_1}\overline{z}^{m_2})(\xi,\eta,\overline{\xi},\overline{\eta}) &= c_{k_1}(-1)^{k_1}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k_1}\Big|_{z=0}(\alpha z+\gamma)^{m_1}(\beta z+\delta)^{2k_1-m_1}\times\\ &\times\ c_{k_2}(-1)^{k_2}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^{k_2}\Big|_{z=0}(\overline{\alpha z}+\overline{\gamma})^{m_2}(\overline{\beta}\overline{z}+\overline{\delta})^{2k_2-m_2}.\end{aligned}$$

Литература

1. Д. П. Желобенко. Компактные группы Ли и их представления.

2. V. F. Molchanov, N. B. Volotova. Finite dimensional analysis and polynomial quantization on a hyperboloid of one sheet. Вестник Тамбовского университета. Сер. Естеств. и техн. науки, 1998, том 3, вып. 1, 65–78.