

$$\begin{aligned}\nu(t) &= H_\alpha(t, 0, 0), \quad \psi^0(t) = -\alpha, \\ \psi(t) &= H_{\alpha y}(t, 0, 0), \quad \sigma(t) = H_{\alpha yy}(t, 0, 0).\end{aligned}$$

Производные в последних равенствах заменяются разностными аналогами, находятся матричные функции $N_\alpha(t)$, $M_\alpha(t)$, $P_\alpha(t)$, с помощью которых управление (в форме синтеза) для задачи (2) записывается в следующем виде:

$$v^{II}(t, y) = -N_\alpha^{-1}(t) (M_\alpha(t) + P_\alpha^T(t)y).$$

3. Если $t > t_I$, то осуществляется переход на второй шаг алгоритма, иначе полагается

$$u^{II}(t, x) = v^{II}(t, x - x^I(t)) + u^I(t), \quad t \in T \setminus \{t_F\}.$$

С помощью уравнений исходной системы находится соответствующий искомый элемент $m^{II} = (x^{II}(t), u^{II}(t))$.

Метод был успешно применен для практической реализации скользящих режимов и для определения границы опасной зоны и управления вертолетом при посадке в нештатной ситуации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1997.

Гурман Владимир Иосифович
Институт программных систем РАН
Россия, Переславль-Залесский
e-mail: gurman@cprc.botik.ru

Трушкова Екатерина Александровна
Институт программных систем РАН
Россия, Переславль-Залесский
e-mail: katerina@tea.botik.ru

Поступила в редакцию 7 мая 2007 г.

СПЕЦИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА МОНОДРОМИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ¹

© Ю. Ф. Долгий

Рассмотрим линейную периодическую систему дифференциальных уравнений с последствием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-r}^0 d\eta(t, s) x(t+s), \quad t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty), \quad (1)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №06-01-00399) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН №13 «Математические методы в нелинейной динамике».

где $x : [-r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, матричная функция η периодична по первому аргументу, с периодом ω , $0 < r \leq \omega$, $\eta(\cdot, 0) = 0$. Полагаем, что функция η измерима по Лебегу на множестве $[0, \omega] \times [-r, 0]$, при фиксированном $t \in [0, \omega]$ функция $\eta(t, \cdot)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, \omega]$ и $\text{Var}_{[-r, 0]} \eta(t, \cdot)$, $t \in [0, \omega]$, является интегрируемой по Лебегу функцией на $[0, \omega]$.

При указанных выше условиях система дифференциальных уравнений (1) для начального момента $t_0 = 0$ и произвольной начальной функции $\varphi \in \mathbb{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ имеет единственное решение $x(\cdot, \varphi) : [-r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее начальному условию $x(s, \varphi) = \varphi(s)$ при $s \in [-r, 0]$. При описании качественного поведения системы (1), следуя Н. Н. Красовскому, будем использовать функциональное пространство состояний $\mathbb{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, выбирая в качестве элементов решения функции $x_t(\vartheta, \varphi) = x(t + \vartheta, \varphi)$, $\vartheta \in [-r, 0]$, $t \geq 0$ [1]. Устойчивость решений рассматриваемой системы с последействием можно описывать в терминах спектра линейного вполне непрерывного оператора монодромии [2], действующего в пространстве $\mathbb{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ и определяемого формулой $U\varphi = x_\omega(\cdot, \varphi)$. Заменим пространство $\mathbb{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ сепарабельным гильбертовым пространством состояний $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ со скалярным произведением, определяемым формулой $(\varphi, \psi) = \psi^\tau(0) \varphi(0) + \int_{-r}^0 \psi^\tau(s) \varphi(s) ds$.

Пусть матричная функция

$$P(t, s) \triangleq \frac{\partial}{\partial s} \int_s^t \eta(\xi, s - \xi) d\xi, \quad t \geq s \geq -r,$$

удовлетворяет условию $\text{vrai} \sup_{s \in [-r, t]} |P(\cdot, s)| \in L_\infty^{loc}(0, +\infty)$. Тогда оператор U допускает не-

прерывное расширение на пространство $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, с сохранением вполне непрерывности [3]. Расширение оператора монодромии на пространство $\mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ определяется формулой

$$(U\varphi)(\vartheta) = T(\vartheta) \varphi(0) + \int_{-r}^0 S(\vartheta, s) \varphi(s) ds, \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Здесь $T(\cdot) \in L_\infty^{loc}(-r, 0)$, $\text{vrai} \sup_{s \in [-r, 0]} S(\cdot, s) \in L_\infty^{loc}(-r, 0)$.

Нас интересует возможность представления

$$U = K + V \tag{2}$$

оператора монодромии, в котором $K : \mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ — конечномерный оператор, $V : \mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{H}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ — вольтерровый оператор. Наличие такого представления позволяет использовать итерационную процедуру при нахождении целой функции, определяющей характеристическое уравнение оператора монодромии [4].

Представление (2) имеет место для периодических систем (1), порождаемых дискретной мерой η , которой соответствует система дифференциальных уравнений с постоянными запаздываниями, когда они рационально соизмеримы с периодом коэффициентов. Для систем с переменными кусочно постоянными запаздываниями такое представление имеет место, если все значения запаздываний рационально соизмеримы с периодом. В работе [5] показано, что для кусочно постоянных запаздываний требование рациональной соизмеримости их значений можно ослабить. Для систем с переменным запаздыванием достаточные условия существования представления (2) получены в [6]. Если переменное запаздывание порождает диффеоморфизм окружности, то для существования рассматриваемого представления достаточно, чтобы число вращения диффеоморфизма было рациональным [7]. При нахождении условий существования представления (2), в случае абсолютно непрерывной меры η используются результаты работы [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
2. Шиманов С.Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 102–116.
3. Долгий Ю.Ф. Характеристическое уравнение в задаче асимптотической устойчивости периодической системы с последействием // Тр. Ин-та математики и механики. Екатеринбург: УрО РАН, 2005. Т. 11, № 1. С. 65–96.
4. Долгий Ю.Ф. Определители возмущения в задаче асимптотической устойчивости движений в периодических системах с последействием // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби: тр. Междунар. семинара, посвящ. 60-летию акад. А.И. Субботина. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2006. Т. 1. С. 82–90.
5. Долгий Ю.Ф. О построении характеристического уравнения для дифференциальных уравнений с кусочно постоянным запаздыванием // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск. 1979. С. 31–41.
6. Долгий Ю.Ф. О построении характеристического уравнения для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 1977. № 3. С. 9–19.
7. Долгий Ю.Ф. Представление оператора монодромии в виде суммы конечномерного и вольтеррова операторов // ДАН. 1994. Т. 334, № 2. С. 138–141.
8. Жуковский Е.С. К теории уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 9. С. 1599–1605.

Долгий Юрий Филиппович
 Уральский государственный ун-т
 Россия, Екатеринбург
 e-mail: Yurii.Dolgi@usu

Поступила в редакцию 5 мая 2007 г.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ ¹

© В. А. Дыхта

Рассматриваются достаточные условия оптимальности для неклассических задач динамической оптимизации, в которых управлениями являются векторные меры, а траектории — функции ограниченной вариации. Предлагаемый подход базируется на использовании семейства решений неравенства Гамильтона-Якоби (в частности, соответствующего уравнения) и развивает идеи, изложенные в [1, 2] применительно к классическим задачам оптимального управления. Заметим, что этот подход можно рассматривать как существенную модификацию известных достаточных условий оптимальности В.Ф. Кротова.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 07-01-00741, № 05-01-00187).