

system (3) (and system (2)) with these control functions is reducible by some Lyapunov transformation to the system

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) + \lambda I & S(t) \\ 0 & A(t) + \mu I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

C o r o l l a r y 1. Suppose system (1) is uniformly completely controllable and uniformly completely observable (when $u = 0$). Then the closed-loop system is uniformly stabilizable.

T h e o r e m 2. Suppose system (1) is uniformly completely controllable and uniformly completely observable (when $u = 0$). Let the coefficients of system (1) be periodic. Then for any numbers $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ there exist periodic measurable bounded control functions $U(t), V(t)$ and a bounded periodic matrix $S(t)$ such that system (3) (and system (2)) with these control functions is reducible by some periodic Lyapunov transformation to the system (4).

C o r o l l a r y 2. Suppose system (1) is uniformly completely controllable and uniformly completely observable (when $u = 0$). Let the coefficients of system (1) be periodic. Then for any $\nu > 0$ there exist periodic measurable bounded control functions $U(t), V(t)$ such that system (3) (and system (2)) with these control functions is reducible by some periodic Lyapunov transformation to the system with the constant matrix P whose eigenvalues λ_i satisfy condition $\operatorname{Re} \lambda_i < -\nu$ for all $i = 1, \dots, 2n$.

Zaitsev Vasily Alexandrovich
Udmurtia State University
Russia, Izhevsk
e-mail: verba@udm.ru

Поступила в редакцию 23 апреля 2007 г.

ОБ УСТОЙЧИВОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНЬОРИНИ С МОДИФИЦИРОВАННЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ ЛАГРАНЖА

© А. Я. Золотухин

Вариационная задача Синьорини имеет вид [1]

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega - \int_{\Omega} f u d\Omega \quad \longrightarrow \quad \min \quad (1)$$

на выпуклом замкнутом множестве

$$G = \{u \in W_2^1(\Omega) : \gamma u \geq \psi \text{ п. в. на } \Gamma\}, \quad (2)$$

где $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с достаточно регулярной границей Γ , $f \in L_2(\Omega)$ и $\psi \in L_2(\Gamma)$ — заданные функции, $\gamma u \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ есть след функции $u \in W_2^1(\Omega)$ на Γ .

Здесь ψ — заданное давление жидкости на границе (жидкость может втекать в Ω , если $u(x) \leq \psi(x)$, и не может вытекать ни при каких условиях), f — поток жидкости в Ω , u — искомое распределение давления.

Функционал $J(u)$ не является строго коэрцитивным на множестве G и поэтому задача (1–2) может и не иметь решения. Если

$$\int_{\Omega} f d\Omega < 0, \quad (3)$$

то $J(v) \rightarrow +\infty$, когда $\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \rightarrow \infty$, $v \in G$ и, следовательно, задача разрешима. Условие (3) обеспечивает и единственность решения. Предполагается, что условие (3) выполнено.

Классический функционал Лагранжа имеет вид [2]

$$M(v, l) = J(v) - \int_{\Gamma} l \gamma v d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega - \int_{\Omega} f u d\Omega - \int_{\Gamma} l \gamma v d\Gamma, \\ \forall (v, l) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma). \quad (4)$$

Пусть $(L_2(\Gamma))^+$ — конус неотрицательных функций, интегрируемых с квадратом на Γ .

Точка $(v^*, l^*) \in W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$ называется седловой точкой функционала $M(v, l)$, если выполнено неравенство

$$M(v^*, l) \leq M(v^*, l^*) \leq M(v, l^*) \quad \forall (v, l) \in W_2^1(\Omega) \times (L_2(\Gamma))^+.$$

Известно, что если решение задачи u^* Синьорини в коэрцитивном случае принадлежит пространству $W_2^2(\Omega)$, то функционал Лагранжа (4) имеет единственную седловую точку $(u^*, \frac{\partial u^*}{\partial n})$, то есть $v^* = u^*$ почти всюду в Ω и $l = \frac{\partial u^*}{\partial n}$ почти всюду на Γ , где n — единичный вектор внешней нормали к Γ . Аналогичный результат справедлив и для полукоэрцитивной задачи (1). Можно последовательно показать, что

- 1) $M(u^*, l) \leq M(u^*, \frac{\partial u^*}{\partial n}) \quad \forall l \in (L_2(\Gamma))^+$;
- 2) $M(u^*, \frac{\partial u^*}{\partial n}) \leq M(v, \frac{\partial u^*}{\partial n}) \quad \forall v \in W_2^1(\Omega)$; неравенство верно, так как $-\Delta u^* = f$ в Ω ;
- 3) единственность седловой точки.

Применить метод Удзавы поиска седловой точки функционала $M(v, l)$ в полукоэрцитивном случае нельзя, так как сходимость итерационного процесса обеспечивается согласованием длины шага сдвига по двойственной переменной l с константой положительной определенности квадратичной формы минимизируемого функционала, но в полукоэрцитивной задаче (1) квадратичная форма $a(v, v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega$ лишь неотрицательно определена. Это требует модифицировать функционал Лагранжа.

Модифицированный функционал Лагранжа $L(v, l)$ на пространстве $W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$ определим так [3]:

$$L(v, l) = J(v) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma} \{[(l - r\gamma v)^+]^2 - l^2\} d\Gamma,$$

где $r > 0$ — const, символ w^+ означает $\max\{w, 0\}$.

Функционал $L(v, l)$ является выпуклым по v при фиксированном l и вогнутым по l при фиксированном v и дифференцируем по Гато по обоим переменным и для производных имеют место равенства

$$(\nabla_v L(v, l), h) = a(v, h) - (f, h) - \int_{\Gamma} (l - r\gamma v)^+ h d\Gamma \quad \forall h \in W_2^1(\Omega),$$

$$(\nabla_l L(v, l), \theta) = \frac{1}{r} \int_{\Gamma} ((l - r\gamma v)^+ - l) \theta d\Gamma \quad \forall \theta \in L_2(\Gamma),$$

где

$$a(v, h) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla h d\Omega, \quad (f, h) = \int_{\Omega} f h d\Omega.$$

Рассмотрим для задачи Синьорини (1) метод Удзавы с модифицированным функционалом Лагранжа $L(v, l)$.

Зададим произвольно начальную точку $l^0 \in W^{1/2}(\Gamma)$, которая является следом на Γ некоторой функции $u^0 \in W_2^1(\Omega)$. Считая (u^k, l^k) известными, определяем

$$u^{k+1} = \arg \min_{v \in W_2^1(\Omega)} L(v, l^k);$$

и затем определяем $l^{k+1} = (l^k - r\gamma u^{k+1})^+$. Здесь r параметр сдвига по двойственной переменной. Для каждого $k = 1, 2, \dots$ существуют точки u^k и, если $u^k \in W_2^2(\Omega)$, единственны. Последовательность $\{u^k\}$ сходится к решению задачи (1–2) [3].

Численная реализация метода осуществлена для прямоугольной области Ω с использованием метода конечных элементов в сочетании с методом Ньютона второго порядка решения вспомогательных конечномерных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Мир, 1980.
2. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. Модифицированные функции Лагранжа. М.: Наука, 1989.
3. Бу Г., Намм Р.В., Сачков С.А. Итерационный метод поиска седловой точки для полуконвективной задачи Синьорини, основанный на модифицированном функционале Лагранжа // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. М., 2006. Т. 46, № 1. С. 26–36.

Золотухин Анатолий Яковлевич
Тульский государственный ун-т
Россия, Тула
e-mail: zolot@uic.tula.ru

Поступила в редакцию 8 мая 2007 г.

УСТОЙЧИВОСТЬ БИФУРЦИРУЮЩИХ РЕШЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© Л. С. Ибрагимова

Рассматривается дискретная система, описываемая уравнением

$$x_{k+1} = f(x_k, \lambda), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $f(x, \lambda)$ — зависящий от скалярного параметра λ оператор, действующий в гильбертовом пространстве H с нормой $\|\cdot\|$. Предполагается, что оператор $f(x, \lambda)$ является вполне непрерывным, причем выполнено тождество $f(0, \lambda) \equiv 0$, то есть система (1) при всех значениях