УДК 517.98

Инвариантные аффинные связности на алгебре обобщенных дуальных чисел

© М. С. Ильина

Ключевые слова: алгебры, дуальные числа, аффинные связности

Построена коммутативная алгебра размерности n над полем вещественных чисел, обобщающая алгебру дуальных чисел (последняя получается при $n = 2$). Определяется группа движений G этой алгебры. Найдены аффинные связности, инвариантные относительно G. Найдены геодезические.

We define a commutative algebra of dimension n over the field of real numbers, it is a generalization of the algebra of dual numbers (the latter corresponds to $n = 2$). We define a group G of motions, determine affine connections invariant with respect to G and find geodesic lines.

В настоящей работе мы строим коммутативную ассоциативную алгебру Λ_n размерности n над полем вещественных чисел, обобщающую алгебру дуальных чисел (последняя есть Λ_2). Группу "движений" алгебры Λ_n мы определяем как группу G линейных операторов в Λ_n, порожденную группой $\mathbb{R}^n$ параллельных переносов и группой V "вращений т. е. умножений на e^{iy}. Мы находим все аффинные связности в Λ_n, инвариантные относительно G. Для $n = 2$ такие связности были найдены в [1]. Мы находим геодезические, отвечающие инвариантным аффинным связностям в Λ_n. Оказывается, что каждая геодезическая лежит в двумерной плоскости.

§ 1. Алгебра обобщенных дуальных чисел

Напомним [4], что дуальными числами называются символы $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, действия над ними производятся как над многочленами от буквы i, причем считается, что $i^2 = 0$. В частности, два числа $z = x + iy$, $w = u + iv$ перемножаются по формуле

$$zw = (x + iy)(u + iv) = xu + i(xv + yu). \tag{1.1}$$

Эти числа образуют алгебру Λ_2 над $\mathbb{R}$ размерности 2. Она ассоциативна и коммутативна. Дуальные числа можно реализовать как вещественные матрицы второго порядка:

$$z = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующее обобщение алгебры дуальных чисел. Запишем вектор $z \in \mathbb{R}^n$ в виде $z = (x, y_2, \dots, y_n)$, где $x \in \mathbb{R}$, $y = (y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, и затем запишем этот вектор в виде $z = x + iy$. Зададим умножение векторов $z = x + iy$, $w = u + iv$ из $\mathbb{R}^n$ формулой, по виду точно такой же, что и (1.1):

$$zw = (x + iy)(u + iv) = xu + i(xv + uy).$$

Мы получаем ассоциативную и коммутативную алгебру над $\mathbb{R}$ размерности n. Обозначим ее Λ_n. Ее можно реализовать как алгебру вещественных матриц порядка n:

$$z = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & xE \end{pmatrix},$$

записанных в блочном виде соответственно разбиению $n = 1 + (n-1)$ числа n, здесь y – вектор-столбец из $\mathbb{R}^{n-1}$, x – число, E – единичная матрица порядка $n - 1$.

Определим функцию e^z стандартным рядом $\mathrm{e}^z = \sum (z^m/m!)$, получаем

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x(1 + iy),$$

в частности,

$$\mathrm{e}^{iy} = 1 + iy.$$

Группу "движений" алгебры Λ_n определим как группу G линейных операторов в Λ_n, порожденную группой $\mathbb{R}^n$ параллельных переносов и группой V "вращений т. е. умножений на e^{iy}. Такое умножение есть линейный оператор с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & E \end{pmatrix}.$$

§ 2. Аффинные связности

Приведем некоторые сведения об аффинных связностях [2], [3]. *Аффинная связность* на многообразии M – это соответствие ∇ , которое каждому векторному полю X сопоставляет линейное отображение ∇_X пространства векторных полей в себя, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$\begin{aligned} \nabla_{fX+gY} &= f\nabla_X + g\nabla_Y \\ \nabla_X(fY) &= (Xf)Y + f\nabla_X Y \end{aligned}$$

для $f, g \in C^\infty(M)$. Оператор ∇_X называется *ковариантной производной* относительно X.

Определим функции $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(x)$ (*символы Кристоффеля*) формулой

$$\nabla_{\partial/\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_k \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Символы Кристоффеля образуют n матриц

$$\nabla_i = \left(\Gamma_{ij}^k\right), \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

(k – номер строки, j – номер столбца).

Пусть Φ – диффеоморфизм многообразия M. Аффинная связность ∇ называется *инвариантной* относительно Φ, если

$$d\Phi(\nabla_X Y) = \nabla_{d\Phi(X)} d\Phi(Y). \tag{2.2}$$

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – локальные координаты в M. Тогда $\partial/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$, – базис в касательном пространстве. Условие инвариантности (2.2) равносильно системе

$$d\Phi\left(\nabla_{\partial/\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = \nabla_{d\Phi(\partial/\partial x_i)} d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right). \tag{2.3}$$

Пусть Φ в локальных координатах задается функциями $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда условие инвариантности (2.3) имеет вид

$$\sum_{m,k,s} \Gamma_{ks}^m(y) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_m} = \sum_{m,p} \Gamma_{ij}^p(x) \frac{\partial y_m}{\partial x_p} \frac{\partial}{\partial y_m},$$

или, после приравнивания коэффициентов при производных,

$$\sum_{k,s} \Gamma_{ks}^m(y) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} = \sum_{m,p} \Gamma_{ij}^p(x) \frac{\partial y_m}{\partial x_p}. \tag{2.4}$$

Аффинная связность ∇ называется *инвариантной* относительно группы преобразований многообразия M, если она инвариантна относительно каждого преобразования из этой группы.

Теорема 2.1 *Для аффинной связности на пространстве $\mathbb{R}^n$, инвариантной относительно группы всех параллельных переносов, символы Кристоффеля постоянны:* $\Gamma_{ij}^k = \text{const}$.

Доказательство. Для параллельного переноса $x \mapsto y = x + a$ матрица Якоби есть единичная матрица. Тогда из (2.4) получаем $\Gamma_{ij}^m(x+a) = \Gamma_{ij}^m(x)$. $\square$

Пусть $x(t)$ – кривая на многообразии M, $\dot{x}(t)$ – касательный вектор к ней (точка обозначает производную по t). Кривая $x(t)$ называется *геодезической*, если $\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = 0$. В локальных координатах геодезическая задается уравнением

$$\ddot{x}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j = 0. \tag{2.5}$$

§ 3. Инвариантные аффинные связности на алгебре Λ_n

В этом параграфе мы находим все аффинные связности на алгебре Λ_n, инвариантные относительно группы G, см. § 1, и находим геодезические.

Пусть ∇ – аффинная связность на алгебре Λ_n, инвариантная относительно группы G. По теореме 2.1 ее символы Кристоффеля Γ_{ij}^k постоянны. Для этих *чисел* по (2.4) получаем уравнения

$$\sum_{k,s} \Gamma_{ks}^m \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} = \sum_{m,p} \Gamma_{ij}^p \frac{\partial y_m}{\partial x_p}. \tag{3.1}$$

Для удобства формулировок и вычислений вернемся от обозначений элементов алгебры Λ_n в § 1 к стандартным обозначениям векторов из $\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Возьмем стандартный базис в $\mathbb{R}^n$: $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, единица стоит на k-м месте.

Теорема 3.1 *Аффинная связность ∇ на алгебре Λ_n, инвариантная относительно группы G, зависит от $n^2 - n + 1$ параметров, соответствующие матрицы (2.1) имеют вид*

$$\nabla_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$$\nabla_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ae_p - c_p & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 2, \ldots, n, \tag{3.3}$$

де a – число из $\mathbb{R}$, b – вектор-столбец из $\mathbb{R}^{n-1}$, e_p –элемент стандартного базиса в $\mathbb{R}^{n-1}$: $e_p = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, единица стоит на p-ом месте, c – вещественная $(n-1) \times (n-1)$-матрица:

$$c = \begin{pmatrix} c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

c_p – ее столбец с номером $p = 2, \ldots, n$.

Доказательство. Нам нужно использовать инвариантность связности ∇ относительно группы "вращений" – умножений на e^{iv}, $v \in \mathbb{R}^{n-1}$. Возьмем в качестве v вектор te_p, $t \in \mathbb{R}$, $p = 2, \ldots, n$. Тогда это вращение есть линейный оператор $x \mapsto y$ в $\mathbb{R}^n$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ te_p & E \end{pmatrix},$$

она же есть матрица Якоби, так что (δ_{ij} – символ Кронекера):

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \delta_{ik} + t\,\delta_{i1}\,\delta_{kp}\ .$$

Система уравнений (3.1) превращается в следующую

$$\sum_{k,s} \Gamma^m_{ks} \left(\delta_{ik} + t\,\delta_{i1}\,\delta_{kp}\right) \left(\delta_{sj} + t\,\delta_{sp}\,\delta_{j1}\right) = \sum_{r} \Gamma^r_{ij} \left(\delta_{mr} + t\,\delta_{r1}\,\delta_{mp}\right).$$

Приравнивая коэффициенты при t и t^2, получаем две системы уравнений:

$$\Gamma^m_{pp} = 0, \tag{3.4}$$

$$\Gamma^m_{ip}\,\delta_{j1} + \Gamma^m_{pj}\,\delta_{i1} = \Gamma^1_{ij}\,. \tag{3.5}$$

Сиситема (3.5) дает 4 системы соответственно 4 случаям: а) $i \neq 1$, $j \neq 1$; б) $i = 1$, $j \neq 1$; в) $i \neq 1$, $j = 1$; г) $i = 1$, $j = 1$:

$$\Gamma^1_{ij} = 0 \quad i \neq 1, j \neq 1; \tag{3.6}$$

$$\Gamma^m_{pj} = \Gamma^1_{1j}\,, \quad i = 1, j \neq 1; \tag{3.7}$$

$$\Gamma^m_{ip} = \Gamma^1_{i1}\,, \quad i \neq 1, j = 1; \tag{3.8}$$

$$\Gamma^m_{1p} + \Gamma^m_{p1} = \Gamma^1_{11}\,, \quad i = 1, j = 1. \tag{3.9}$$

Равенство (3.6) означает, что в матрицах $\nabla_2, \ldots, \nabla_n$ элементы первой строки, начиная со второго, равны нулю. В равенстве (3.7) при $m = 1$ имеем $\Gamma^1_{pj} = \Gamma^1_{1j}$, но по (3.6) левая часть здесь равна 0, так что $\Gamma^1_{1j} = 0$. Следовательно, во-первых, (3.6) верно при всех i (не только при $i \neq 1$):

$$\Gamma^1_{ij} = 0, \quad j \neq 1, \tag{3.10}$$

так что во всех матрицах $\nabla_1, \nabla_2, \ldots, \nabla_n$ элементы первой строки, начиная со второго, равны нулю. Поэтому матрица ∇_1 имеет вид (3.2). Кроме того, (3.10) дает, в силу (3.7), что

$$\Gamma^m_{pj} = 0, \quad p \neq 1, j \neq 1,$$

это включает в себя (3.4) и означает, что в матрицах $\nabla_2, \ldots, \nabla_n$ все столбцы, начиная со второго, равны нулю. Поэтому равенство (3.8) дает $\Gamma^1_{i1} = 0$ для $i \neq 1$, т. е. в матрицах $\nabla_2, \ldots, \nabla_n$ первый элемент в первой строке равен нулю и потому в матрицах $\nabla_2, \ldots, \nabla_n$ вся первая строка равна нулю. Наконец, равенство (3.9) означает, что элемент в матрице ∇_p в первом столбце в m-ой строке равен $a - c_{mp}$. Итак, матрицы $\nabla_1, \nabla_2, \ldots, \nabla_n$ имеют вид, указанный в (3.2) и (3.3). $\square$

Приведем матрицы ∇_i для $n = 2$ и $n = 3$;

$$\nabla_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}, \quad \nabla_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A - C & 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla_1 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & D & F \\ C & E & G \end{pmatrix}, \quad \nabla_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A - D & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -F & 0 & 0 \\ A - G & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вернемся к обозначениям § 1: элемент из алгебры Λ_n есть $z = x + iy$. Напишем систему уравнений (2.5) для геодезических в алгебре Λ_n с аффинной связностью, указанной в теореме 3.1:

$$\ddot{x} + a\dot{x}^2 = 0, \tag{3.11}$$

$$\ddot{y}_k + a\dot{x}\dot{y}_k + b_k\dot{x}^2 = 0, \quad k = 2, \dots, n. \tag{3.12}$$

Мы видим, что эта система содержит только элементы первого столбца матрицы ∇_1. Исключим параметр t из этой системы, в качестве параметра возьмем x. Обозначим дифференцирование по x штрихом, из (3.11), (3.12) получим

$$\begin{array}{rcl} \dot{y}_k & = & \dot{x} \cdot y_k', \\ \ddot{y}_k & = & \ddot{x} \cdot y_k' + \dot{x}^2 \cdot y_k'' = \dot{x}^2(-ay_k' + y_k''). \end{array}$$

Подставляя это в (3.12), получим $y_k'' + b_k = 0$, откуда

$$y_k = -\frac{b_k}{2}x^2 + \lambda_k x + \mu_k, \quad k = 2, \dots, n, \tag{3.13}$$

где λ_k и μ_k – произвольные постоянные.

Всякая геодезическая лежит в двумерной плоскости. В самом деле, исключая x^2 из каждой пары равенств (3.13), мы получим $n-2$ линейно независимых уравнения, которые и дают эту плоскость.

Литература

1. В. Ф. Молчанов, Н. А. Малашонок. Некоторые геометрические и физические задачи для плоскости дуального переменного. Державинские чтения V, Матер. научн. конф., февр. 2000, Тамбов, 2000, 5–7.

2. П. К. Рашевский. Курс дифференциальной геометрии, М.: Гостехиздат, 1956.

3. С. Хелгасон. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М.: Мир, 1964.

4. И. М. Яглом. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия, М.: Наука, 1969.