ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ РЕКУРРЕНТНЫХ ДВИЖЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

© П. А. Исанбаев

О п р е д е л е н и е 1. Говорят, что последовательность функций $x_k(t)$ *локально сходится* к функции $x_0(t)$, если имеет место равномерная сходимость на любом конечном промежутке числовой оси $\mathbb{R}$.

О п р е д е л е н и е 2. Если некоторая последовательность сдвигов функции $x(t+h_i)$ локально сходится к функции $\hat{x}(t)$, то функция $\hat{x}(t)$ называется *присоединенной* к функции $x(t)$.

О п р е д е л е н и е 3. Функция $x(t)$ называется *рекуррентной*, если для каждой функции $\hat{x}(t)$, присоединенной к $x(t)$, функция $x(t)$ будет присоединенной к $\hat{x}(t)$.

Рассматриваются достаточные условия оптимальности рекуррентного решения дифференциального включения задачи $\mathcal{L}$:

$$\dot{x} \in Q(t,x),$$

$$x(t) \in X(t),$$

$$I(x(\cdot)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Phi(t,x(t),\dot{x}(t))dt \to \min .$$

Будем считать, что множество $X(t)$ замкнуто при каждом фиксированном t и его пересечение с каждым компактом в $\mathbb{R}$ непрерывно в смысле Хаусдорфа; отображение $(t,x) \to Q(t,x)$ удовлетворяет перечисленным ниже условиям (a), (b), (c), а функция $(t,x,y) \to \Phi(t,x,y)$ — условиям (α), (β), (γ) :

(a) отображение $t \to Q(t,x)$ непрерывно и рекуррентно при каждом фиксированном x;

(b) отображение $x \to Q(t,x)$ полунепрерывно снизу при каждом фиксированном t;

(c) для каждого $\gamma \geqslant 0$ существует число μ_γ такое, что $\max\limits_{|x|\leqslant\gamma} |Q(t,x)| \leqslant \mu_\gamma$ при всех t;

(α) функция $t \to \Phi(t,x,y)$ непрерывна и рекуррентна при фиксированных (x,y);

(β) функция $t \to \Phi(t,x,y)$ интегрируема по Лебегу на любом решении $x(\cdot)$ включения $\dot{x} \in Q(t,x)$, удовлетворяющем ограничению $x(t) \in X(t)$;

(γ) функция $x \to \Phi(t,x,y)$ полунепрерывна снизу на $X(t)$ при каждых фиксированных (t,y).

Назовем функцией Л. С. Понтрягина функцию $H(t,x,y,\psi) = \langle\psi,y\rangle - \Phi(t,x,y)$ и обозначим $\mathcal{H}(t,x,\psi) = \sup\limits_{y\in Q(t,x)} H(t,x,y,\psi)$. Пусть функция $\mathcal{H}(t,x,\psi)$ удовлетворяет условию Липшица по x.

Определим многозначное отображение $(t,x,\psi) \to \Gamma(t,x,\psi)$ как субдифференциал Кларка $\Gamma(t,x,\psi) = \partial_x(-\mathcal{H}(t,x,\psi))$ (см. [1]) и рассмотрим сопряженное дифференциальное включение

$$\dot{\psi} \in \Gamma(t,x(t),\psi).$$

Следующая теорема является усилением теоремы 2 из работы А. Е. Ирисова и Е. Л. Тонкова [2].

Т е о р е м а 1. *Пусть отображение* $Q(t,x)$ *удовлетворяет условиям* (a), (b), (c), *функция* $\Phi(t,x,y)$ *удовлетворяет условиям* (α), (β), (γ) *и существует допустимое рекуррентное решение* $x(\cdot)$ *задачи* $\mathcal{L}$, *которому соответствует рекуррентное решение* $\psi(\cdot)$ *дифференциального включения* $\dot{\psi} \in \Gamma(t,x(t),\psi)$ *такое, что на паре* $(x(\cdot),\psi(\cdot))$ *выполнено условие максимума*

$$\mathcal{H}(t,x(t),\psi(t)) = H(t,x(t),\dot{x}(t),\psi(t))$$

при почти всех t. *Тогда рекуррентное оптимальное решение задачи* $\mathcal{L}$ *существует. Любое допустимое рекуррентное решение* $x(\cdot)$ *задачи* $\mathcal{L}$, *удовлетворяющее перечисленным выше условиям, является оптимальным.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
2. *Ирисов А.Е., Тонков Е.Л.* Достаточные условия оптимальности рекуррентных по Биркгофу движений дифференциального включения // Вестник Удмуртского университета. Серия: Математика. Ижевск, 2005. № 1. С. 59–74.

Исанбаев Павел Анатольевич
Удмуртский государственный ун-т
Россия, Ижевск
e-mail: zoochg@gmail.com

Поступила в редакцию 10 мая 2007 г.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СВЕТЕ ИДЕЙ Н.В. АЗБЕЛЕВА

© **Р. И. Кадиев**

Исследуются вопросы устойчивости для линейного функционально-дифференциального уравнения по семимартингалу. Частными случаями такого уравнения являются, например, функционально-дифференциальные уравнения Ито и их гибриды, функционально-дифференциальные уравнения в мерах, а также другие стохастические дифференциальные уравнения с последействием. К такому уравнению сводятся обыкновенные дифференциальные уравнения по семимартингалу, дифференциальные уравнения по семимартингалу с запаздывающим аргументом, интегро-дифференциальные уравнения по семимартингалу. Исследование проводится с помощью метода вспомогательных или «модельных» уравнений («W-метод» Н.В.Азбелева).

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$ — полное вероятностное пространство с фильтрацией; $Z := col(z^1, ..., z^m)$ — m-мерный семимартингал на нем; $L^n(Z)$ состоит из $n \times m$-матричных