УДК 517.98

О КОЛМОГОРОВСКИХ ПОПЕРЕЧНЫХ КРИВЫХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© Р. С. Исмагилов

Ключевые слова: гильбертовы пространства; метрические пространства; приближения; поперечники.

Аннотация: Рассматривается асимптотика последовательности колмогоровских n-поперечников компакта в комплексном гильбертовом пространстве, в частности, винеровой спирали.

Начнём с определения колмогоровского поперечника. Пусть H – гильбертово пространство (вещественное либо комплексное). Для любых множеств $K \subset H$ и $M \subset H$ введём величину $d(K, M) = \sup\{d(x, M), x \in K\}$, где $d(x, M) = \inf d(x, y), y \in M$. Эту величину называют *отклонением* множества K от M. Колмогоровский *n-поперечник* множества K определяется равенством $d_n(K) = \inf d(K, L_n)$ где L_n пробегает совокупность всех n-мерных плоскостей (т.е. всех множеств вида $x + L_n^0$, где L_n^0 есть n-мерное линейное подпространство). Это понятие введено А. Н. Колмогоровым в [1]. Наиболее интересен случай, когда K – компакт; в этом случае $d_n(K) \to 0$, $n \to \infty$, и асимптотика последовательности $\{d_n(K)\}$ есть важная характеристика компакта K. Работа [1] положила начало обширной области исследований в теории приближений.

Рассмотрим следующий конкретный пример компакта. В вещественном гильбертовом пространстве $L_2(0, 1)$ рассмотрим множество $W = \{f_t, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, где f_t есть индикатор отрезка $[0, t]$. Его называют винеровой спиралью. У. Рудин и С. Б. Стечкин доказали [2], что $An^{-1/2} \leqslant \leqslant d_n(W) \leqslant Bn^{-1/2}$, где $0 < A < B < \infty$. В работе [3] автор получил асимптотическое соотношение $d_n(W) \simeq \pi^{-1} n^{-1/2}$.

Пусть K – метрическое пространство, допускающее изометрическое вложение $f : K \to S$ в евклидово (т.е. вещественное гильбертово) пространство S. Ясно, что величины $d_n(f(K))$ не зависят от вложения f. Расмотрим теперь изометрическое вложение $f : K \to H$ в *комплексное* гильбертово пространство H. Любопытный (хотя и простой) факт состоит в том, что величины $d_n(f(K))$ могут зависеть от f. В следующей теореме указан пример, показывающий, что эта зависимость может оказаться существенной. В этой теореме H – это комплексное гильбертово пространство, W – винерова спираль.

Т е о р е м а. *Для любого числа $c \in [\sqrt{1/2}, 1]$ существует такое изометрическое вложение $f : W \to H$, что $d_n(f(W)) \simeq c\pi^{-1} n^{-1/2}$.*

Описанное явление заслуживает дальнейшего изучения (в частности, рассмотрения других компактов). Вот конкретная задача по этой теме. Для каких метрических компактов K, вложимых в евклидово пространство, величина $d_n(f(K))$ (здесь $f : K \to H$ есть изометрическое вложение в комплексное гильбертово пространство H) не зависит от вложения f?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kolmogorov A.N.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. of Math., 1936. V. 37. P. 107–110.

2. *Rudin W.* L_2-approximation by partial sums of orthogonal developments // Duke Math. Journal, 1952. V. 19. №1. P. 1–4.

3. *Исмагилов Р.С.* Об n-мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве // Функц. анализ и его прил., 1968. Т. 2. Вып. 4. С. 32–39.

Abstract: we consider asymtotic behaviour of Kolmogorov n-widths for a compact in a complex Hilbert space, in particular, for the Wiener spiral.

Keywords: hilbert spaces; metric spaces; approximations; widths.

Исмагилов Раис Сальманович
д. ф.-м. н., профессор
МГТУ им. Н. Э. Баумана
Россия, Москва
e-mail: molchano@molchano.tstu.ru

Rais Ismagilov
doctor of phys.-math. sciences, professor
MSTU named after N. Bauman
Russia, Moscow
e-mail: molchano@molchano.tstu.ru

УДК 517.929.4, 519.21

УСТОЙЧИВОРСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© Р. И. Кадиев

Ключевые слова: устойчивость решений; стохастические дифференциальные уравнения; метод вспомогательных уравнений.

Аннотация: Исследуются вопросы p-устойчивости тривиального решения нелинейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений; получены достаточные условия устойчивости с помощью метода вспомогательных уравнений.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$ — полное вероятностное пространство с фильтрацией; $Z := col(z^1, ..., z^m)$ — m-мерный семимартингал на нем; $1 \leqslant p < \infty$; E — символ математического ожидания; $||.||$ — норма $n \times n$–матрицы, согласованная с нормой $|.|$ вектора в R^n.

В дальнейшем используются следующие линейные пространства случайных процессов:

— $L^n(Z)$ состоит из $n \times m$–матричных предсказуемых случайных процессов, заданных на $[0, +\infty)$, чьи строки являются локально интегрируемыми по семимартингалу Z;

— k^n состоит из n-мерных $\mathcal{F}_0$–измеримых случайных величин;

— D^n состоит из n-мерных случайных процессов на $[0, +\infty)$, которые могут быть представлены в виде: $x(t) = x(0) + \int\limits_0^t H(s)dZ(s)(t \geqslant 0)$, где $x(0) \in k^n$, $H \in L^n(Z)$.

Пусть $\gamma : [0, +\infty) \to R^1$ — положительная функция. Введем следующие обозначения линейных нормированных пространств:

$$M_p^\gamma = \{x : x \in D^n, ||x||_{k_p^n} \overset{def}{=} \sup_{t\geqslant 0}(E|x(t)|^p)^{1/p} < \infty\};$$

$$k_p^n = \{\alpha : \alpha \in k^n, ||\alpha||_{k^n} \overset{def}{=} E|\alpha|^p < \infty\}.$$

Главным объектом исследования является уравнение вида

$$dx(t) = (Nx)(t)dZ(t) \ (t \geqslant 0), \tag{1}$$