УДК 517.98

# РЕГУЛЯРНЫЕ КРУГЛЫЕ КОНУСЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ОГРАНИЧЕННЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

© К.В. Коробова

Korobova K.V. Regular round cones in the spaces of bounded and continuous functions. Round cone was determined and investigated in the space of bounded (continuous) functions. The condition of its strict regularity was established. The explicit formula defining the best approximation of an arbitrary function by the introduced cone was deduced.

**1.** В настоящее время теория упорядоченных банаховых пространств является одним из основных разделов функционального анализа. Геометрическим свойствам пространств, упорядоченных конусами различного вида, посвящены работы Л.В. Канторовича, Б.З. Вулиха, М.А. Красносельского, В.Т. Худалова. Цель данной статьи – определить порядок в пространствах ограниченных и непрерывных функций с помощью круглого конуса и исследовать его свойства. Приведем необходимые для дальнейшего изложения определения и факты.

Одним из наиболее общих методов построения конуса в произвольном банаховом пространстве $X$ является следующий: если $f \in X^*$ – произвольный непрерывный функционал на $X$ такой, что $\|f\| = 1$ и $\alpha \in (0,1]$, то положим $K[f,\alpha] = \{x \in X: f(x) \geq \alpha\|x\|\}$. Конус $K[f,\alpha]$ называется *круглым* конусом, определенным функционалом $f$ и числом $\alpha$. Известно, что он обладает свойствами нормальности, несплющенности [1], а также телесности и оштукатуриваемости [2]. Замкнутый конус $K$ в банаховом пространстве $X$ называется *строго регулярным*, если:

$$\forall\, x, y \in X \pm x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|; \tag{1}$$

$$\forall\, x \in X\, \exists\, y \in K: \pm x \leq y,\ \|x\| = \|y\|. \tag{2}$$

В упорядоченном строго регулярным конусом банаховом пространстве для произвольного элемента $x$ можно определить множество его *метрических модулей* $|X|$, т. е. таких элементов $y$ конуса $K$, что $\pm x \leq y$ и $\|y\| = \|x\|$, и, как следствие, два множества $X_+ = (x + |X|)/2$ и $X_- = (|X| - x)/2$. По аналогии с банаховыми решетками множества $X_+$ и $X_-$ называются множествами *положительных* (соответственно, *отрицательных*) *частей элемента* $x$.

Конус $K$ называется *достижимым*, если для любого элемента $x$ пространства $X$ существует элемент $Px \in K$, на котором реализуется минимум в формуле расстояния от $x$ до $K$, т. е. $d(x, K) = \inf\{\|x - a\|: a \in K\}$.

Множество всех таких $Px$ обозначается $M(x)$ и называется *множеством элементов наилучшего приближения*. Известно [3], что если норма аддитивна на регулярном конусе, то $K$ – *вполне достижимый* конус, т. е. конус, для которого $M(x) = X_+$.

В произвольных банаховых пространствах вводят различные виды ортогональности так, чтобы в гильбертовом пространстве они совпадали с естественной. Рассмотрим так называемую ортогональность по Роберу: элементы $x$ и $y$ называются ортогональными по Роберу (обозначается $x \underset{R}{\perp} y$), если $\|x + ty\| = \|x - ty\|$ для любого $t > 0$. Известно [3], что любой вполне достижимый конус – *вполне регулярен*, т. е. для любого $x \in X$ и любых $x_+$ и $x_-$ таких, что $x = x_+ - x_-$, справедливо $x \underset{R}{\perp} y$.

**2.** Рассмотрим $B[0,1]$ – линейное пространство вещественных ограниченных на $[0,1]$ функций с нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)|: x \in [0,1]\}$. Определим порядок в этом пространстве с помощью круглого конуса $K[\delta_{x0},\alpha]$, определенного функционалом $\delta_{x0}: B[0,1] \to R$ таким, что $\delta_{x0}(f) = f(x_0)$, т. е. конусом вида

$$K[\delta_{x0},\alpha] = \{f \in B[0,1]: \delta_{x0}(f) \geq \alpha \| f \|\} = \\ = \{f \in B[0,1]: f(x_0) \geq \alpha \| f \|\}.$$

Следующая теорема, приведенная с доказательством, дает условие строгой регулярности этого конуса.

Т е о р е м а. В пространстве $B[0,1]$ круглый конус $K[\delta_{x0},\alpha]$ является строго регулярным только при $\alpha = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что при $\alpha = 1$ конус является строго регулярным. Такой конус имеет вид

$$K[\delta_{x0},\alpha] = \{f \in B[0,1]: f(x_0) \geq 1 \cdot \| f \|\} = \\ = \{f \in B[0,1]: f(x_0) = \| f \|\}.$$

Проверим выполнение условия (1): пусть $\pm f \leq g$, тогда $(g + f)(x_0) = \|g + f\|$ и $(g - f)(x_0) = \|g - f\|$. Откуда последовательно выводим: $2\|g\| = 2g(x_0) = \|g+f\| + \|g - f\|$, т. е. $\|f\| \leq \|g\|$.

Для проверки второго условия строгой регулярности возьмем произвольную функцию $f \in B[0,1]$, $f \neq 0$. Если $|f(x_0)| = \|f\|$, то при $f(x_0) > 0$ в качестве мажорирующей функции $g$ берем саму функцию, т. е. $g = f$; при $f(x_0) < 0$ берем $g = -f$. Пусть $|f(x_0)| < \|f\|$. Рассмотрим функцию

$$g(x)=\begin{cases}\|f\|, & \text{если} \quad x=x_0\\ \dfrac{f(x)f(x_0)}{\|f\|}, & \text{если} \quad x\neq x_0\end{cases}.$$

Легко видеть, что $g(x_0) = \|f\| = \|g\|$, значит, $g\geq 0$ и $\|g\| = \|f\|$. Покажем, что $\pm f\leq g$. В самом деле, $(g-f)(x_0) = \|f\| - f(x_0)$. С другой стороны,

$$\|g-f\|=$$
$$=\sup\left\{\|f\|-f(x_0),\sup\left\{\left|\frac{f(x)(f(x_0)-\|f\|)}{\|f\|}\right|: x\in[0,1]\setminus x_0\right\}\right\}=$$
$$=\|f\|-f(x_0).$$

Откуда следует, что $g-f\geq 0$. Аналогично, $(g+f)(x_0) = \|f\| + f(x_0) = \|g+f\|$, что влечет $g+f\geq 0$. Таким образом, условие (2) выполняется, откуда следует строгая регулярность конуса $K[\delta_{x0},1]$.

Легко показать, что норма аддитивна на конусе $K[\delta_{x0},1]$. Получаем, что пространство $B[0,1]$ упорядочено строго регулярным конусом с аддитивной на нем нормой. Известно [3], что в этом случае оно обладает свойством единственности конуса, т. е. существование строго регулярного конуса $K$ такого, что $K\subset K[\delta_{x0},1]$ или $K\supset K[\delta_{x0},1]$, влечет за собой равенство $K = K[\delta_{x0},1]$. Очевидно, что $K[\delta_{x0},1]\subset K[\delta_{x0},\alpha]$, где $\alpha<1$. Откуда следует, что конус $K[\delta_{x0},\alpha]$ при $\alpha<1$ строго регулярным не является. Теорема доказана полностью. ■

Из аддитивности нормы на конусе следует ряд его важных свойств:

- строгая монотонность, т. е. если $f, g\in K[\delta_{x0},1]$ и $f>g$, то $\|f\|>\|g\|$;
- вполне достижимость;
- вполне регулярность.

Введение в пространство $B[0,1]$ строго регулярного конуса позволяет для фиксированной функции $f\notin K[\delta_{x0},1]$ описать множество ее метрических модулей:

$$|F|=$$
$$=\left\{\begin{matrix}g\in B[0,1]: g(x_0)=\|f\|,\\ \big|f(x)+f(x_0)\big|-\|f\|\leq g(x)\leq\|f\|-\big|f(x)-f(x_0)\big|, x\neq x_0\end{matrix}\right\}.$$

Наибольший в смысле поточечной упорядоченности элемент из $|F|$ имеет вид $g(x) = \|f\| - |f(x) - f(x_0)|$ и определяет положительную и отрицательную части функции $f$:

$$f_+(x)=\frac{1}{2}\big(\|f\|-|f(x)-f(x_0)|+f(x)\big)=$$
$$=\begin{cases}(\|f\|+f(x_0))/2, & f(x)\geq f(x_0);\\ f(x)+(\|f\|-f(x_0))/2, & f(x)<f(x_0).\end{cases}$$

$$f_-(x)=\frac{1}{2}\big(\|f\|-|f(x)-f(x_0)|-f(x)\big)=$$
$$=\begin{cases}-f(x)+(\|f\|+f(x_0))/2, & f(x)\geq f(x_0);\\ (\|f\|+f(x_0))/2, & f(x)<f(x_0).\end{cases}$$

Из вполне регулярности конуса следует, что элементы $f_+$ и $f_-$ ортогональны по Роберу, т. е. $f_+\underset{R}{\perp} f_-$.

Если пространство ограниченных функций упорядочено круглым конусом, то возникает задача из теории приближений об определении меры приближения фиксированной функции $f$ множеством $K[\delta_{x0},1]$, т. е. величины $d(f, K[\delta_{x_0},1]) = \inf\{\|f-g\|: g\in K[\delta_{x0},1]\}$. В работе [4] доказаны условия существования и единственности элемента наилучшего приближения, общие критерии ближайшего элемента в выпуклом замкнутом множестве. Однако редко можно встретить вывод явных формул, определяющих проекцию произвольного элемента на множество, а также величину наилучшего приближения. Автором же доказано, что величина расстояния от произвольной ограниченной функции до конуса $K[\delta_{x0},1]$ вычисляется по формуле $d(f, K[\delta_{x0},1]) = (\|f\| - f(x_0))/2$ и реализуется оно на элементах из $F_+$. Используя результаты из [3], можно утверждать, что нормы элементов из $F_-$ равны между собой и совпадают с $d(f, K[\delta_{x0},1])$. Нормы элементов из $F_+$ также равны между собой и совпадают с $d(-f, K[\delta_{x0},1]) = (\|f\| + f(x_0))/2$.

Все приведенные выше результаты справедливы и для пространства непрерывных функций $C[0,1]$, т. к. доказательства проводятся аналогично только в качестве мажорирующей функции $g(x)$ нужно взять $g(x) = \|f\| - |f(x) - f(x_0)|$, т. к. это непрерывная на $[0,1]$ функция.

**3.** Таким образом, в пространствах $B[0,1]$ и $C[0,1]$ для произвольного $x_0\in[0,1]$ определен круглый строго регулярный конус $K$, исследованы его свойства. Найдено множество ближайших элементов конуса и величина наилучшего приближения для любой функции $f\in B[0,1]$ ($C[0,1]$). Данные результаты могут быть использованы при решении задач теории приближений, а также в теории полуупорядоченных пространств.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Вулих Б.З.* Введение в теорию конусов в нормированных пространствах. М., 1977.
2. *Вулих Б.З.* Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах. М., 1978.
3. *Худалов В.Т.* Упорядоченные банаховы пространства и их приложения. М., 1999.
4. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. М., 1960.


Поступила в редакцию 20 июля 2006 г.