ISSN 1810-0198. Вестник ТГУ, т. 14, вып. 4, 2009

Корняк Владимир Васильевич
д. ф.-м. н., профессор
Объединенный институт
ядерных исследований
Россия, Дубна
e-mail: kornyak@jinr.ru

Vladimir Kornyak
doctor of phys.-math. sciences, professor
Joint Institute for Nuclear Research
Russia, Dubna
e-mail: kornyak@jinr.ru

УДК 517.911, 517.968

О ПРОДОЛЖАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ [1]

© **Е. В. Корчагина**

Ключевые слова: функционально-диффенциальное включение; многозначные импульсные воздействия; продолжаемое решение.

Аннотация: Рассмотрен вопрос о продолжаемости решений функционально-дифференциального включения с полунепрерывным снизу вольтерровым по А.Н. Тихонову оператором.

Пусть $\mathcal{U} \in [a,b]$ – измеримое по Лебегу множество. Обозначим $\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})$ пространство суммируемых по Лебегу функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|ds$, comp $[\mathbb{R}^n]$– множество непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$; $S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ – множество всех ограниченных замкнутых выпуклых по переключению (разложимых) [1] подмножеств пространства $\mathbf{L}_1^n[a,b]$.

Пусть $t_k \in [a,b]$ $(a < t_1 < \ldots < t_m < b)$ – конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, ..., $(t_m,b]$ ограниченных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k = 1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$. Если $\tau \in (a,b]$, то $\widetilde{C}^n[a,\tau]$ – это пространство функций $x : [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$, являющихся сужениями на отрезок $[a,\tau]$ элементов из $\widetilde{C}^n[a,b]$ с нормой$\|x\|_{\widetilde{C}^n[a,\tau]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,\tau]\}$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \Phi(x), \tag{1}$$

$$\Delta(x(t_k)) \in I_k(x(t_k)),\ k = 1,\ldots,m, \tag{2}$$

$$x(a) = x_0, \tag{3}$$

где отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ полунепрерывно снизу и удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией.

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (№ 07-01-00305, 09-01-97503), научной программой "Развитие научного потенциала высшей школы"(РНП № 2.1.1/1131) и включена в Темплан № 1.6.07.

Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \text{comp}\ [\mathbb{R}^n]$, $k = 1, 2, ...m$ непрерывны по Хаусдорфу, $\Delta(x(t_k)) = x(t_k + + 0) - x(t_k)$, $k = 1, 2, ...m$.

О п р е д е л е н и е 1. *Под решением задачи* (1)-(3) будем понимать функцию $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такое $q \in \Phi(x)$, что при всех $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{4}$$

где $\Delta(x(t_k)) \in I_k(x(t_k)),\ k = 1, \ldots, m$.

Предположим, что оператор $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ вольтерров по А.Н. Тихонову [2].

Пусть $\tau \in (a,b]$. Определим непрерывное отображение $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ равенством

$$(V_\tau(x))(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если} \quad t \in [a,\tau]; \\ x(\tau), & \text{если} \quad t \in (\tau, b]. \end{cases} \tag{5}$$

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ является *решением задачи* (1)-(3) *на отрезке* $[a,\tau]$, $\tau \in (a,b]$, если существует такое $q \in (\Phi(V_\tau(x)))|_\tau$, что функция $x : [a,\tau] \to \mathbb{R}^n$ представима в виде

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k: t_k \in [a,\tau]} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{6}$$

где отображение $V_\tau : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau] \to \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ определено равенством (5), $(\Phi(V_\tau(x)))|_\tau$ - множество сужений функций из множества $\Phi(V_\tau(x))$ на отрезок $[a,\tau]$ и $\Delta(x(t_k)) \in I_k(x(t_k)),\ k = 1, \ldots, m$.

О п р е д е л е н и е 3. Решение $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ задачи (1)-(3) называется *непродолжаемым*, если не существует такого решения y задачи (1)-(3) на $[a,\tau]$, ($\tau \in (c,b]$, если $c < b$ и $\tau = b$, если $c = b$), что для любого $t \in [a,c)$ выполнено равенство $x(t) = y(t)$.

Решение задачи (1)-(3) считается непродолжаемым.

Т е о р е м а 1. *Найдется такое* $\tau \in (a,b]$, *что решение задачи* (1)-(3) *существует на отрезке* $[a,\tau]$.

Пусть $\tau \in (a,b]$. Обозначим через $H(x_0,\tau)$ множество решений задачи (1)-(3) на отрезке $[a,\tau]$.

Определим оператор $\Lambda : \mathbf{L}_1^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$, который имеет вид

$$(\Lambda z)(t) = x_0 + \int\limits_a^t z(s)ds, \quad t \in [a,b]. \tag{7}$$

Рассмотрим оператор $\mathfrak{A} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}$, определенный равенством

$$(\mathfrak{A}x)(t) = \Lambda\Phi(x) + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta x(t_k), \tag{8}$$

где $2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}$ - множество непустых ограниченных подмножеств $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $\Delta(x(t_k)) \in I_k(x(t_k))$, $k = 1, \ldots, m$.

Т е о р е м а 2. *Если множество всех локальных решений задачи* (1)-(3) *априорно ограничено, то существует такой выпуклый компакт* $K \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, *что* $H(x_0,b) \subset K$, *для любого* $\tau \in (a,b)$ *выполняется равенство* $H(x_0,\tau) = H(x_0,b)|_\tau$, и $\mathfrak{A}(K) \subset K$, *где отображение* $\mathfrak{A} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to 2^{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}$ *определено равенством* (8), $H(x_0,b)|_\tau$ - множество сужений функций из множества $H(x_0,b)$ на отрезок $[a,\tau]$.

Т е о р е м а 3. *Для того, чтобы решение* $x : [a, c) \to \mathbb{R}^n$ *задачи* $(1) - (3)$ *было продолжаемым на* $[a, \tau]$, $(\tau \in [c, b])$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\overline{\lim\limits_{t \to c-0}} \ |x(t)| < \infty$.

Т е о р е м а 4. *Если* y *– решение задачи* $(1) - (3)$ *на* $[a, \tau]$, $\tau \in (a, b]$, *то существует непродолжаемое решение* x *задачи* $(1) - (3)$, *определенное либо на* $[a, c)$ $(c \in (\tau, b])$, *либо на* $[a, b]$ *такое, что при всех* $t \in [a, \tau]$ *выполнено равенство* $x(t) = y(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Возмущение однозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами // Известия ВУЗов. 1999. № 3. С. 3–16.
2. *Тихонов А.Н.* Функциональные уравнения типа Вольтерра и их приложения к некоторым вопросам математической физики // Бюллетень московского университета. Секция А, 1938. Т. 68. № 4. С. 1-25.

Abstract: The problem of extendability of solutions for a functional-differential inclusion with lower semicontinuous Volterra operator (in the sense of Tikhonov) is considered.
Keywords: functional-differential inclusion; multivalued impulses, extendable solution.

Корчагина Елена Валерьевна
аспирант
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Elena Korchagina
post-graduate student
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

УДК 519.688

О ВЫЧИСЛЕНИИ МНОГОМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В ПРОСТОМ ПОЛЕ [1]

© **А. О. Лапаев**

Ключевые слова: компьютерная алгебра; дискрентное преобразование Фурье; быстрое преобразование Фурье; теория алгоритмов.

Аннотация: Рассматривается способ вычисления дискрентного преобразования Фурье для полиномов многих переменных в кольце $Z_p[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Получены теоретические оценки сложности изложенного подхода.

Пусть $f \in \mathbb{Z}_p[x_1, x_2, \ldots, x_d]$, p – простое число. Пусть наибольшая степень переменной x_i в полиноме f равна $n_i - 1$, $n_i = 2^{N_i}$. Обозначим $n = n_1 n_2 \ldots n_d$. Тогда полином f можно записать в виде:

$$f = \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \ldots \sum_{i_d=0}^{n_d-1} f_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_d^{i_d}$$

[1]Работа выполнена при поддержке программы "Развитие потенциала высшей школы" (проект 2.1.1/1853).