2006. Вып. 2 (31). С. 64-81.

12. *Лисаченко И.В.*, *Сумин В.И.* Об управляемой задаче Гурса-Дарбу в классах функций с суммируемой смешанной производной // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2007. Т. 12. Вып.4. С. 477-479.

13. *Лисаченко И.В.* Нелинейная задача Гурса-Дарбу с возмущаемыми правой частью и граничными функциями // Вестн. ННГУ. Н. Новгород, 2008. №5. С. 107-112.

Abstract: the nonlinear controllable Goursat-Darboux problem is considered. The case when a mixed derivative of the solution is L_p-function ($p > 1$)is considered; the sufficient conditions of existence-stability of global solutions with respect to perturbations of controls is discussed.

Keywords: nonlinear controllable Goursat-Darboux problem; conditions of existence-stability of global solutions.

Лисаченко Ирина Владимировна
Нижегородский государственный
технический университет
Россия, Нижний Новгород
e-mail: i_lisach@mail.ru

Irina Lisachenko
Nizhniy Novgorod State
Technical University
Russia, Nizhniy Novgorod
e-mail: i_lisach@mail.ru

Сумин Владимир Иосифович
д. ф.-м. н., профессор
Нижегородский государственный университет
Россия, Нижний Новгород
e-mail: v_sumin@mail.ru

Vladimir Sumin
doctor of phys.-math. sciences, professor
Nizhniy Novgorod State University
Russia, Nizhniy Novgorod
e-mail: chavnn@mail.ru

УДК 517.911.5

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ К ЗАДАЧЕ О БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© **Н. В. Лой**

Ключевые слова: глобальная бифуркация; направляющая функция; дифференциальное включение первого порядка; периодическое решение.

Аннотация: В данной работе, применяя метод интегральных направляющих функций, мы изучаем глобальную структуру множества периодических решений однопараметрического семейства дифференциальных включений первого порядка.

Обозначим через W_2^1 пространство всех функций $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$, первые производные которых существуют почти всюду на $[0,T]$ и являются элементами пространства $L_2([0,T];\mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\|x\|_W = \|x\|_2 + \|x'\|_2,$$

где

$$\|x\|_2 = \left(\int_0^T \|f(s)\|^2_{\mathbb{R}^n}\, ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ обозначает пространство всех функций $x \in W_2^1$ таких, что $x(0) = x(T)$.
Через $Kv(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество всех непустых выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство дифференциальных включений типа

$$x'(t) \in F\big(t, x(t), \mu\big) \ \text{ для п.в. } t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Предположим, что

(F_T) мультифункция $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ $T-$периодична по первому аргументу, то есть

$$F(t, y, \mu) = F(t + T, y, \mu) \text{ для почти всех } t \in \mathbb{R}, \text{ и любого } (y, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};$$

$(F1)$ для каждого $(y, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ мультиотображение $F(\cdot, y, \mu)\colon [0, T] \to Kv(\mathbb{R}^n)$ имеет измеримое сечение;

$(F2)$ для почти всех $t \in [0, T]$ мультиотображение $F(t, \cdot, \cdot)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху;

$(F3)$ для любого непустого ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ существует такая положительная функция $h_\Omega \in L^2([0, T]; \mathbb{R})$, что

$$\|F(t, y, \mu)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant h_\Omega(t)$$

для всех $(y, \mu) \in \Omega$ и п.в. $t \in [0, T]$, где

$$\|F(t, y, \mu)\|_{\mathbb{R}^n} = \max\{\|z\|_{\mathbb{R}^n} \colon z \in F(t, y, \mu)\};$$

$(F4)$ $0 \in F(s, 0, \mu)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}$ и п.в. $s \in [0, T]$;

$(F5)$ существует $r_0 > 0$ такое, что для каждого $\kappa > 0$ найдется $\eta > 0$ такое, что

$$h(F(t, x, \mu), F(t, x, \mu')) < \kappa$$

для всех (x, μ), $(x, \mu') \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(0, r_0) \times (-r_0, r_0)$, $|\mu - \mu'| < \eta$ и почти всех $t \in [0, T]$, где h обозначает метрику Хаусдорфа на пространстве $Kv(\mathbb{R}^n)$.

Назовем T-периодическим решением семейства (1) такое решение (x, μ), которое удовлетворяет условию: $x(0) = x(T)$. Из $(F4)$ следует, что $(0, \mu)$ является решением семейства (1) для любого $\mu \in \mathbb{R}$. Такие решения называются тривиальными. Под нетривиальным решением семейства (1) понимаем такое решение (x, μ), что $x \neq 0$. Обозначаем через $\mathcal{S}$ множество всех нетривиальных T-периодических решений семейства (1).

О п р е д е л е н и е 1. Непрерывно дифференцируемую функцию $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ будем называть невырожденным потенциалом, если ее градиент

$$\partial V(x) = \{\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial V(x)}{\partial x_n}\}$$

не обращается в нуль при $0 < \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant r$, где $r > 0$ достаточно мало.

Из свойств топологической степени вытекает, что степень невырожденного потенциала

$$deg(\partial V, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(0, r'))$$

не зависит от $r' \in (0, r)$. Это общее значение степени называется индексом невырожденного потенциала и обозначается $ind\, V$.

О п р е д е л е н и е 2 (ср. [2]). Для каждого $\mu \in \mathbb{R}$ невырожденный потенциал $V_\mu \colon \mathbb{R}^n \to \to \mathbb{R}$ называется интегральной направляющей функцией для включения (1), если существует достаточно малое $\pi_\mu > 0$ такое, что для любого $x \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ из

$$0 < \|x\|_2 \leqslant \pi_\mu \text{ и } \|x'(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \|F(t, x(t), \mu)\|_{\mathbb{R}^n} \text{ для почти всех } t \in [0, T]$$

следует

$$\int_0^T (\partial V(x(s)), f(s))\, ds > 0$$

для всех $f \in L_2([0, T]; \mathbb{R}^n)$ такие, что $f(s) \in F(s, x(s), \mu)$ для почти всех $s \in [0, T]$.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены условия* $(F1)-(F5)$ *и* (F_T). *Предположим, что для каждого* $\mu \neq 0$, *достаточно малого по модулю, существует интегральная направляющая функция* V_μ *для включения* (1) *такая, что*

$$\lim_{\mu \to 0^+} ind\, V_\mu - \lim_{\mu \to 0^-} ind\, V_\mu \neq 0.$$

Тогда существует связное множество $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ *такое, что* $(0, 0) \in \overline{\mathcal{R}}$ *и либо* $\mathcal{R}$ *неограничено либо* $(0, \mu_*) \in \overline{\mathcal{R}}$ *для некоторого* $\mu_* \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alexander J.C. and Fitzpatrick P.M.* Global bifurcation for solutions of equations involving several parameter multivalued condensing mappings // Fixed point theory, Proc. Sherbrooke Que. ed. E. Fadell, G. Fournier, Springer Lect. Notes. 1980. V. 886. P. 1-19.

2. *Sergei Kornev, Valeri Obukhovskii.* On some developments of the method of integral guiding functions // Functional Differential Equat. 2005. V. 12 No. 3-4. P. 303-310.

Abstract: in this paper, applying the method of integral guiding functions we consider the problem of global bifurcation of periodic solutions of the family of one-parameter ordinary differential inclusions.

Keywords: global bifurcation; guiding function; ordinary differential inclusion; periodic solution.

Нгуен Ван Лой
аспирант
Воронежский государственный
педагогический университет
Россия, Воронеж
e-mail: loinv14@yahoo.com

Van Loi Nguyen
post-graduate student
Voronezh State
Pedagogical University
Russia, Voronezh
e-mail: loinv14@yahoo.com