ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ [1]

© Г. Г. Магарил-Ильяев

Задача оптимального восстановления линейного функционала на классе элементов ставится следующим образом. Пусть X — векторное пространство, W — непустое подмножество (класс) в X. Пусть Y — другое векторное пространство. Каждому элементу $x \in W$ сопоставлено некоторое множество $F(x) \subset Y$ (то есть определено многозначное отображение $F\colon X \to Y$), которое представляет собой доступную для нас информацию об элементе x. Мы хотим восстановить значения заданного линейного функционала $x_0' \in X'$ (сопряженное пространство к X) на классе W по указанной информации. Под этим понимается следующее. Каждое отображение $m\colon Y \to \mathbb{R}$ объявляем методом восстановления и погрешность такого метода оцениваем величиной

$$e(x_0', W, F, m) = \sup_{\substack{x \in W \\ y \in F(x)}} |\langle x_0', x\rangle - m(y)|.$$

Нас интересует величина

$$E(x_0', W, F) = \inf_{m\colon Y \to \mathbb{R}} e(x_0', W, F, m),$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления* и метод $\widehat{m}$, на котором нижняя грань достигается, называемый *оптимальным методом восстановления.*

В работе [1] показано, что если множество W и график F (то есть множество $\operatorname{gr} F = \{\,(x,y) \in X \times Y \mid x \in W,\ y \in F(x)\,\}$) выпуклы и центрально симметричны, то среди оптимальных методов есть линейный и тем самым $E(x_0', W, F)$ есть значение следующей задачи

$$\sup_{\substack{x \in W \\ y \in F(x)}} |\langle x_0', x\rangle - \langle y', y\rangle| \to \min, \quad y' \in Y', \tag{1}$$

где Y' — сопряженное пространство к Y.

Эта задача выпукла (как верхняя грань выпуклых функций). Каждой задаче (не обязательно выпуклой) можно сопоставить двойственную, «возмутив» ее тем или иным способом (см. подробнее [2]). Рассмотрим следующее возмущение задачи (1)

$$\sup_{\substack{x \in W \\ y \in F(x)}} |\langle x_0' + x', x\rangle - \langle y', y\rangle| \to \min, \quad y' \in Y', \tag{2}$$

где x' — произвольный элемент из X'.

Т е о р е м а. *Пусть X, X' и Y, Y' — две пары локально выпуклых линейных топологических пространств в двойственности, W и $\operatorname{gr} F$ — выпуклые, центрально симметричные*

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 07-01-90102, № 06-01-81004) и НШ-5813.2006.1.

и замкнутые (в соответствующих слабых топологиях) множества. Тогда двойственной к задаче (1) *относительно возмущения* (2) *является задача*

$$\langle x'_0, x\rangle \to \max, \quad x \in W \cap F^{-1}(0) \tag{3}$$

и значения задач (1) *и* (3) *совпадают.*

С л е д с т в и е. *Пусть выполнены условиях теоремы. Тогда погрешность оптимального восстановления* $E(x'_0, W, F)$ *равна значению задачи* (3).

Действительно, из теоремы следует, что эта погрешность не больше значения задачи (3), а то, что она не меньше, показывает несложная выкладка.

Элементарно проверяется, что двойственной к задаче (3) относительно возмущения

$$\langle x'_0, x\rangle \to \max, \quad x \in W \cap F^{-1}(y)$$

является задача (1).

Итак, задачи (1) и (3) являются двойственными друг к другу, но задача (3) в конкретных ситуациях обычно представляет собой стандартную задачу выпуклого программирования. Если удается найти ее решение, то мы находим и решение задачи (1), а тем самым и решение исходной задачи (согласно следствию).

В докладе предполагается привести разнообразные примеры задач оптимального восстановления, в которых оптимальный метод найден на указанном здесь пути.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Т. 50. Вып. 1. С. 85–93.
2. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. 2-е изд. М.: УРСС, 2003.

Магарил-Ильяев Георгий Георгиевич
Московский государственный институт
радиотехники, электроники и автоматики
Россия, Москва
e-mail: magaril@mirea.ru

Поступила в редакцию 5 мая 2007 г.