УДК 517.995

БИФУРКАЦИИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

© С. А. Муртазина

Ключевые слова: бифуркация; вынужденные колебания.

Аннотация: Рассматривается задача о локальных бифуркациях вынужденных колебаний двупараметрических систем автоматического регулирования. Получен новый достаточный признак бифуркации, а также предложена итерационная схема приближенного исследования бифуркации.

Рассматривается система автоматического регулирования, описываемая уравнением вида

$$L(\frac{d}{dt},\lambda)x = M(\frac{d}{dt},\lambda)f(x,t,\lambda), \tag{1}$$

где λ – скалярный или векторный параметр, операторные многочлены $L(p,\lambda)$, $M(p,\lambda)$ с вещественными коэффициентами степени n и m соответственно ($n > m$), гладко зависящими от параметра λ. Пусть функция $f(x,t,\lambda)$ представима в виде $f(x,t,\lambda) = c(\lambda)x + \varepsilon(x,t,\lambda)$, в котором T-периодическая по t нелинейность $\varepsilon(x,t,\lambda)$ является гладкой по x и λ, непрерывна по t, причем $|\varepsilon(x,t,\lambda)| = o(|x|)$ при $|x| \to 0$.

Система (1) при всех значениях λ имеет нулевое положение равновесия $x \equiv 0$, в окрестности которой под действием вынуждающей силы $f(x,t,\lambda)$ возможны различные локальные бифуркации [1], в частности, возможно возникновение ненулевых T-периодических колебаний (бифуркация вынужденных колебаний), ненулевых периодических колебаний периода kT при $k > 1$ (бифуркация субгармонических колебаний), почти периодических колебаний и др. В настоящей статье рассматривается задача о возникновении в системе (1) вынужденных колебаний периода T.

Значение λ_0 параметра λ называется [2] точкой бифуркации вынужденных колебаний системы (1), если при переходе через данное значение у системы (1) возникают или исчезают малые по амплитуде периодические колебания периода T.

Положим $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Пусть выполнены условия:

U 1. $L(\pm\omega i,\lambda_0) - c(\lambda_0)M(\pm\omega i,\lambda_0) = 0$, $L(\pm\omega ki,\lambda_0) - c(\lambda_0)M(\pm\omega ki,\lambda_0) \neq 0$ $(k \neq 1)$.

U 2. $L(\pm\omega ki,\lambda_0) \neq 0$, $k = 0,1,2...$

Соответствующая бифуркация вынужденных колебаний имеет коразмерность равную двум и, следовательно, чтобы бифуркация была типичной, уравнение (1) должно зависеть от двух параметров. Пусть $\lambda = (\alpha,\beta)$.

Положим $\tau = W(\omega i,\lambda_0)$, $\xi = W'_\alpha(\omega i,\lambda_0)$, $\eta = W'_\beta(-\omega i,\lambda_0)$; здесь $W(p,\lambda) = \dfrac{M(p,\lambda)}{L(p,\lambda)}$ – передаточная функция линейного звена системы (1).

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены условия U1, U2 и*

$$c(\lambda_0)Im\left[c(\lambda_0)\xi\eta + c'_\alpha(\lambda_0)\tau\eta + c'_\beta(\lambda_0)\xi\overline{\tau}\right] \neq 0.$$

Тогда $\lambda_0 = (\alpha_0,\beta_0)$ – точка бифуркации вынужденных колебаний системы (1).

Систему (1) можно (различными способами) записать в виде равносильной системы

$$x' = A(\lambda)z + \gamma f(z,t,\lambda),\ z \in R^n, \tag{2}$$

где $\gamma \in R^n$–фиксированный вектор.

Пусть $U(z,\lambda)$ – оператор сдвига за время от 0 до T по траекториям системы (2). Задача о бифуркации вынужденных колебаний системы (1) равносильна задаче о бифуркации малых ненулевых решений операторного уравнения $z = U(z,\lambda)$, которую можно представить в виде

$$z = B(\lambda)z + b(z,\lambda), \quad z \in R^n, \tag{3}$$

где $B(\lambda)$ – оператор сдвига [2] за время от 0 до T для линейной системы $z' = A(\lambda)z$. Нелинейный вполне непрерывный оператор $b(z,\lambda)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\lim_{|z|\to 0} \sup_{|\lambda-\lambda_0|\leqslant 1} \frac{|b(z,\lambda)|}{|z|} = 0, \quad \sup_{|\lambda-\lambda_0|\leqslant 1} |b(z_1,\lambda) - b(z_2,\lambda)| \leqslant \varepsilon(\rho)\,|z_1 - z_2\,|, \quad |z_1|, |z_2| \leqslant \rho,$$

для некоторой функции $\varepsilon(\rho)$ такой, что $\varepsilon(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$.

Приведем общую схему исследования бифуркации в двупараметрических операторных уравнениях вида (3), приводящую к асимптотическим формулам.

Пусть $e \in R^n$ – некоторый вектор; значение λ_0 назовем правильной точкой бифуркации уравнения (3) по направлению вектора e, если при любом $\varepsilon > 0$ существует значение параметра $\lambda = \lambda_\varepsilon :\ \|\lambda_\varepsilon - \lambda_0\| < \varepsilon$, при котором уравнение (3) имеет ненулевое решение z_ε так, что $\|z_\varepsilon - \varepsilon e\| = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Векторы z_ε и значения λ_ε назовем бифурцирующими решениями уравнения (3).

Условие U1 эквивалентно тому, что 1 является полупростым собственным значением оператора $B(\lambda_0)$ кратности 2. Пусть e и g линейно независимые собственные векторы оператора $B(\lambda_0)$, отвечающие собственному значению 1. Сопряженный оператор $B^*(\lambda_0)$ также имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2, которому отвечают собственные векторы e^*, g^*.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\det \begin{bmatrix} (B'_\alpha(\lambda_0)e, e^*) & (B'_\beta(\lambda_0)e, e^*) \\ (B'_\alpha(\lambda_0)e, g^*) & (B'_\beta(\lambda_0)e, g^*) \end{bmatrix} \neq 0$. *Тогда* λ_0 *– точка бифуркации малых решений уравнения (3).*

В основе схемы построения бифурцирующих решений уравнения (3) положим метод функционализации параметра.

На первом этапе рассматривается функционализированное уравнение

$$z = B[\alpha(z), \beta(z)]z + b[z, \alpha(z), \beta(z)], \tag{4}$$

где $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ – непрерывные функционалы, которые предлагается выбрать в виде $\alpha(z) = \alpha_0 + \frac{1}{\varepsilon}\left[(z, e^*) - \varepsilon\right]$, $\beta(z) = \beta_0 + \frac{1}{\varepsilon}(z, g^*)$; $\varepsilon > 0$ – вспомогательный малый параметр.

На втором этапе уравнение (4) изучается методом Ньютона-Канторовича. Для этого (4) представляется в виде

$$G(z) + W(z) = 0, \;\; G(z) = z - B[\alpha(z), \beta(z)]x, \;\; W(z) = -b[z, \alpha(z), \beta(z)]. \tag{5}$$

Операторы G и W действуют в пространстве R^n и зависят от параметра $\varepsilon > 0$.

Положим $z_0 = \varepsilon e$; из условии теоремы 2 следует, что существует ограниченный оператор $\Gamma_0 = [G'(z_0)]^{-1}$, при этом оператор Γ_0 не зависит от ε. Для оператора Γ_0 может быть получено явное представление из формулы, определяющей оператор $G'(z_0)$.

Т е о р е м а 3. *При всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *уравнение (5) имеет в шаре* $S(z_0, \dfrac{\varepsilon}{4})$ *решение* x_ε*, которое может быть получено как предел последовательных приближений*

$$z_{n+1} = z_n - \Gamma_0 G(z_n) - \Gamma_0 W(z_n), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Теорема 3 позволяет получить асимптотические формулы для бифурцирующих решений уравнения (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.

2. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1966. 329 с.

Abstract: In this paper we consider the local bifurcations' problem of two-parametric control sistems' forced oscillations. The new sufficient feature of bifurcation is received and the iterative scheme of aproximate investigation of bifurcation proposed in the article.

Keywords: bifurcation; forced oscillations.

Муртазина Сария Аширафовна
старший преподаватель
Сибайский институт БГУ
Россия, Башкортостан, Сибай
e-mail: sariamurtaz@mail.ru

Sariya Murtazina
senior teacher
Sibai Institute of BSU
Russia, Bashkortostan, Sibai
e-mail: sariamurtaz@mail.ru

УДК 517.93

ЛОКАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

© Н. Г. Павлова

Ключевые слова: локальная управляемость; управляемая система; система уравнений в вариациях; условие 2-регулярности.

Аннотация: Рассматривается управляемая динамическая импульсная система. В предположении, что в нефиксированном допустимом управлении выполнено условие 2-регулярности, доказана локальная управляемость этой системы.

Рассматривается управляемая система

$$dx(t) = f(x(t), u(t), t)dt + G(t)d\mu(t),\ t \in [t_1, t_2], \tag{1}$$

$$x(t_1) = x_1,\ \mu \in \mathbb{K}. \tag{2}$$

Все функции, определяющие задачу, достаточно гладкие. $\mathbb{K}$ — множество всех k- мерных борелевских мер μ, таких, что $\mu(B) \subset K$ для любого борелевского множества B, где K — заданный острый выпуклый замкнутый конус. В качестве класса допустимых управлений рассматривается множество пар $(u, \mu):\ \mu \in \mathbb{K},\ u \in L^m_\infty[t_1, t_2]$.

Фиксируем допустимое управление $(\hat{u}(\cdot), \hat{\mu}(\cdot))$.