3. *Аграчёв А.А., Вахрамеев С.А., Гамкрелидзе Р.В.* Проблемы геометрии. Т. 14. // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. М., 1983. С. 3–56.

Нарманов Абдигаппар Якубович
Национальный университет Узбекистана
Узбекистан, Ташкент
e-mail: narmanov@yandex.ru

Шарипов Анваржон Солиевич
Национальный университет Узбекистана
Узбекистан, Ташкент
e-mail: asharipov@inbox.ru

Поступила в редакцию 5 мая 2007 г.

МЕТОД ПРИРАВНИВАНИЯ УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

© Г. Насритдинов

В макроэкономических исследованиях часто приходится решать оптимизационные задачи. Целый ряд таких задач формулируется с привлечением производственных функций (ПФ). Таковыми являются задачи максимизации прибыли, минимизации общих затрат, максимизации объема выпуска и др. Имеются классические методы решения упомянутых задач, они связаны с определенными трудностями практического характера. Если функции, участвующие в постановке оптимизационных задач, имеют определенными свойствами, то можно предложить более рациональный способ решения задач. Этот метод назовем методом приравнивания угловых коэффициентов и изложим его для задачи максимизации объема выпуска при заданном бюджетном ограничении

$$\begin{cases} F(L,K) \to \max, \\ Q(L,K) = I, \end{cases} \tag{1}$$

где $F(L,K)$ — неоклассическая ПФ, $Q(L,K)$ — вообще говоря, нелинейная функция, I — заданное положительное число, выражающее бюджетное ограничение. Напомним неоклассические условия для $F(L,K)$:

$$\begin{array}{l} F(L,K) \in C^2(R_t^2), F(0,K) = F(L,0) = 0\,; \;\; F(0,0) = 0\,; \\ F(\lambda L, \lambda K) \equiv \lambda F(L,K), \lambda > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0\,, \\ \frac{\partial F}{\partial K} > 0\,, \;\; \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0\,, \; \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \; \frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K} \geqslant 0 \quad \forall\,(L,K) \in {R_+}^2\,. \end{array} \tag{2}$$

Пусть функция $Q(L,K)$ удовлетворяет условиям:

$$Q(L,K) > 0\,, \quad \frac{\partial Q}{\partial L} > 0, \frac{\partial Q}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} > 0, \; \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial Q} \leqslant 0 \qquad \forall (L,K) \in {R_+}^2$$

О п р е д е л е н и е . Если для $(L_0, K_0) \in {R_+}^2$ имеют место равенство

$$Q(L_0, K_0) = I$$

и соотношение

$$F(L_0, K_0) = \max_{(L,K)\in {R_+}^2} F(L, K),$$

то (L_0, K_0) называется решением задачи (1).

Отметим, что (1) является задачей нелинейного программирования с ограничениями типа равенств. Она решается методом множителей Лагранжа. Для изложения метода приравнивания угловых коэффициентов сначала рассмотрим уравнение бюджетного ограничения $Q(L, K) = I$. Это уравнение описывает кривую l_Q, расположенную в I четверти координатной плоскости.

Л е м м а 1. *Уравнение* $Q(L, K) = I$ *однозначно разрешимо относительно* K, *то есть* $K = \varphi(L)$.

Л е м м а 2. *Кривая* l_Q *вогнута и функция* $K = \varphi(L)$, $L \geqslant 0$ *монотонно убывающая.*

Теперь рассмотрим линии уровня ПФ $F(L, K)$, то есть уравнение $F(L, K) = C$, $C = const > 0$. Кривые, являющееся линиями уровня, обозначим l_c. Известно, что для неоклассических ПФ линии l_c называются изоквантами, которые являются выпуклыми с горизонтальной и вертикальной асимптотами.

С увеличением $C > 0$ линии l_c «параллельно» движутся в северо-восточном направлении. Поскольку кривая l_Q вогнута и изокванты l_c выпуклы, то кривая l_Q касается единственной изокванты при $C = C_0$. При $C < C_o$ каждая изокванта пересекается с линией l_Q в двух точках, но в точках пересечения C' и C'' имеем $F(L', K') = F(L'', K'') < F(L_o, K_o)$. А при $C > C_O$ изокванты не пересекаются с линией l_Q. Поэтому в точке (L_o, K_o) функция $F(L, K)$ достигает наибольшего значения. В точке (L_o, K_o) обе кривые l_Q и l_C имеют общую касательную. Поэтому имеет место равенство $k_1 = k_2$, т.е.

$$-\frac{\frac{\partial Q(L_o,K_o)}{\partial L}}{\frac{\partial Q(L_o,K_o)}{\partial K}} = -\frac{\frac{\partial F(L_o,K_o)}{\partial L}}{\frac{\partial F(L_o,K_o)}{\partial K}}.$$

Следовательно, решение задачи (1) является решением системы уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{\frac{\partial Q(L,K)}{\partial L}}{\frac{\partial Q(L,K)}{\partial K}} = -\frac{\frac{\partial F(L,K)}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}} \\ \\ \quad Q(L,K) = I \end{array}\right. . \tag{3}$$

З а м е ч а н и е. Если объем выпуска постоянен и $F(L, K) = Q$, можно поставить задачу минимизации линейной или не линейной функции расходов.

Приведём постановку этих задач :

$$1. \left\{\begin{array}{c} \varphi(L,K) = p_1K + p_2L \to \min, \\ F(L,K) = Q \end{array}\right.$$

$$2. \left\{\begin{array}{c} \varphi(L,K) = p_1\varphi(K) + p_2g(L) \to \min, \\ F(L,K) = Q \end{array}\right.$$

К решению этих задач также можно применять метод приравнивания угловых коэффициентов.

Насритдинов Гаппар
Национальный университет Узбекистана
Узбекистан, Ташкент
e-mail: asharipov@inbox.ru

Поступила в редакцию 5 мая 2007 г.