The sufficient conditions for the set $\mathfrak{M}$ to be strongly positively invariant under inclusion can be expressed in terms of so-called Lyapunov functions. Let $r > 0$ and let $\mathfrak{M}^r \doteq \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : x \in M^r(t)\}$ denote a closed r-neighborhood of the set $\mathfrak{M}$. We say that continuous function $V : \mathfrak{M}^r \to \mathbb{R}$ is a *Lyapunov function with respect to the set* $\mathfrak{M}$ if $V(t,x) = 0$ for $(t,x) \in \partial\mathfrak{M}$ and $V(t,x) > 0$ for $(t,x) \in \mathfrak{M}^r\backslash\mathfrak{M}$. If the Lyapunov function V in addition is locally lipschitz, we can consider the generalized Clarke derivative (see, e.g. [1]) of V at the point (t,x) in the direction $(1,h) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ which is defined as follows:

$$V^o(t,x;h) \doteq \limsup_{\substack{(\vartheta,y)\to(t,x)\\ \delta\to 0+}} \frac{V(\vartheta+\delta, y+\delta h) - V(\vartheta,y)}{\delta}.$$

The relation $V_F^o(t,x) \doteq \max\limits_{h\in F(t,x)} V^o(t,x;h)$ we will call the *derivative of function* V *with respect to inclusion* (1).

Theorem 1. *Let us have a Lyapunov function* $(t,x) \to V(t,x)$, $(t,x) \in \mathfrak{M}^r$, *which is locally lipschitz. If for some* $\varepsilon \in (0,r]$ *the inequality* $V_F^o(t,x) \leqslant 0$ *holds for any* $(t,x) \in \mathfrak{M}^\varepsilon\backslash\mathfrak{M}$, *then the set* $\mathfrak{M}$ *is strongly positively invariant.*

We suppose now an ordinary differential inclusion

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad F(t+T,x) = F(t,x) \tag{3}$$

under the following assumptions:

(P1) $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ satisfies Caratheodory conditions;

(P2) there exists continuous, T-periodic map $M : \mathbb{R} \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ such that $M(0)$ is convex and the corresponding set $\mathfrak{M}$ (see (2)) is strongly positively invariant under inclusion (3);

(P3) there exists an integrable function $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ such that for a.e. $t \in \mathbb{R}$ and each $x, y \in M(t)$

$$\mathrm{dist}(F(t,x), F(t,y)) \leqslant k(t)|x-y|.$$

Theorem 2. *Let the maps* F *and* M *satisfy the conditions* $(P1)-(P3)$. *Then there exists a periodic solution* $t \to x(t)$ *for the problem (3) such that* $x(t) \in M(t)$ *for all* t.

REFERENCES

1. *Clarke F.H.* Optimization and Nonsmooth Analysis. Wiley Interscience, New York, 1983.

2. *Benedetti I., Panasenko E.* Positive Invariance and Differential Inclusions with Periodic Right-Hand Side // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. (to appear)

ACKNOWLEDGMENTS: The author is partially supported by RFBR Grant 04-01-00324.

Поступила в редакцию 8 ноября 2006 г.

К ПРОБЛЕМЕ ОБУЧЕНИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

© С.Н. Петрунина

В методической литературе для учителей математики, учебниках методики преподавания математики для педвузов выделяют следующие способы рассуждений при доказательстве (или поиске доказательства) теорем: синтез, восходящий анализ, нисходящий анализ. Традиционно отмечают основной недостаток синтетического метода, состоящий в том, что учащиеся остаются пассивными, "слепо" следующими за рассуждениями учителя. В этом же плане выделяют преимущество аналитических приемов рассуждений.

Но, как известно, обучение аналитическим приемам рассуждений должно опираться на определенный опыт проведения синтетических рассуждений. В этой связи начинать обучать строить доказательства на основе проведения аналитических рассуждений нельзя. Это подтверждает и практика обучения в школе. Опыт показывает, что большинство учащихся 7-8 классов не воспринимают рассуждения, проводимые по схеме восходящего анализа. Еще сложнее обстоит дело при использовании нисходящего анализа.

Таким образом, налицо противоречие – аналитические приемы применять еще рано, а использование синтеза при доказательстве теорем и решении задач, да еще в первый год изучения систематического курса геометрии, мало способствует формированию умения доказывать самостоятельно.

Действительно, буквальное следование учителя текстам доказательств, которые мы видим в учебниках геометрии, ничего хорошего не даст. И здесь проблема не только в том, что дети слабо понимают логику проводимых рассуждений (почему начали с этого, а не с другого, как связаны части доказательства друг с другом и т.д.), но и в том, что даже понимая доказательство, ученик не видит, как надо действовать, чтобы самому доказать тот или иной факт. То есть не решается самая главная задача обучения геометрии – научить ученика доказывать самостоятельно, раскрыв перед ним, так сказать, внутреннюю "кухню" проведения доказательств.

Рассмотрим для примера одну из первых теорем курса геометрии 7-го класса и возможный вариант организации работы учащихся по ее доказательству.

Теорема. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны* (Атанасян Л.С. и др. Геометрия 7-9).

Приведем вначале доказательство из учебника: "Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и докажем, что $\angle B = \angle C$. Пусть AD – биссектриса треугольника ABC. Треугольники ABD и ACD равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = AC$ по условию, AD – общая сторона, $\angle BAD = \angle CAD$, так как AD – биссектриса). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle B = \angle C$. Теорема доказана".

Обратим внимание на несколько моментов. Доказательство начинается с дополнительного построения, необходимость которого (как и любого другого дополнительного построения) для учащихся весьма не очевидна. Далее, почему надо проводить биссектрису, а не медиану или высоту, которые изучались чуть раньше вместе? (Ключевой момент, который дети и не понимают). Указывается, что $AB = AC$ по условию, но ничего подобного в условии нет! В условии сказано четко: дан равнобедренный треугольник. И последнее. При обосновании того, что $\angle BAD = \angle CAD$, ссылка идет на тот факт, что AD – биссектриса. И что из этого?! Без явного упоминания определения биссектрисы треугольника утверждение о равенстве углов нельзя считать обоснованным. Каждый учитель может привести бесчисленные примеры подобных утверждений в рассуждениях учащихся, которые, по сути дела, как мы видим, поощряются учебником.

Предложим следующий вариант изучения данной теоремы, устраняющий данные недостатки. Ключевым моментом в вопросах учителя является фраза "Что следует из такого-то факта?", побуждающая учащихся проводить синтетические рассуждения.

Учитель. Сформулируйте теорему в виде "Если ..., то ..." и выделите условие и заключение теоремы.

Ученик. Если треугольник является равнобедренным, то его углы при основании равны. Условие – треугольник является равнобедренным, заключение - углы при его основании равны.

Учитель. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и докажем, что $\angle B = \angle C$. Что следует из того, что треугольник ABC равнобедренный?

Ученик. По определению равнобедренного треугольника, получаем, что $AB = AC$.

Учитель. Итак, нам известно, что $AB = BC$. Какие еще факты нам известны?

Ученик. Больше никаких.

Учитель. Таким образом, чтобы иметь возможность выводить следствия и тем самым продолжить рассуждения, надо получить новые фигуры. Отсюда вытекает необходимость дополнительных построений. Посмотрите на заключение, что нам требуется доказать?

Ученик. Требуется доказать равенство углов B и C.

Учитель. Равенство отрезков и углов чаще всего доказывают путем включения их как соответствующих элементов в равные треугольники. Какое дополнительное построение можно сделать, чтобы получить два треугольника, в которые входили бы как известные равные элементы (стороны AB и AC), так и элементы, равенство которых надо доказать (углы B и C)?

Ученик. Соединить вершину A и точку на основании BC между ними.

Учитель. Правильно. Назовем эту точку D. Но надо отметить, что полученный отрезок AD является произвольным. Не лучше ли провести какой-нибудь "хороший" отрезок?

Ученики. "Хорошими" будут медиана, биссектриса, высота. Далее важно рассмотреть все три варианта, показав, что только биссектриса позволит доказать требуемый факт. Действительно, если AD – медиана, то мы выйдем на третий признак равенства треугольников, который еще не известен учащимся (заодно показывается необходимость новых знаний!). Если AD – высота, то имеем две стороны и угол не между ними, а значит, уже изученный первый признак равенства треугольников применить нельзя.

Учитель. Итак, нам необходимо рассмотреть биссектрису AD. Что тогда следует из данного факта?

Ученик. По определению биссектрисы угла треугольника, получаем, что $\angle ABD = \angle ACD$.

Учитель. Выделите, что теперь нам известно в треугольниках ABD и ACD и какие следствия можно из этого получить.

Ученик. $AB = AC$, $\angle ABD = \angle ACD$, AD – общая, следовательно, согласно первому признаку равенства треугольников, данные треугольники равны. А значит, согласно определению равных треугольников, получаем, что $\angle B = \angle C$ как соответствующие элементы в этих треугольниках, что и требовалось доказать.

Поступила в редакцию 8 ноября 2006 г.

ТЕХНОЛОГИЯ ИНТЕГРИРОВАННОГО ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА В УСЛОВИЯХ МОДУЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ

© С.Н. Петрунина

Сегодня многие школы и гимназии испытывают значительные трудности в создании и преподавании элективных курсов, особенно интегрированных. Внедрение в учебный процесс интегративного подхода обеспечивает совершенно новый психологический климат для ученика и учителя, заставляет учителей искать новые приемы обучения.

Элективные курсы реализуются за счет школьного компонента и могут выполнять несколько функций: дополнять содержание профильного курса, развивать содержание одного из базовых курсов, удовлетворять разнообразные познавательные интересы школьников, выходящие за рамки выбранного ими профиля. Элективные курсы могут выполнять еще одну важную функцию – быть полигоном для создания и экспериментальной проверки нового поколения учебных материалов. На элективных курсах обучающийся может более самостоятельно или полностью самостоятельно работать с предложенной ему программой, включающей в себя целевой план действий, банк информации, методическое руководство по достижению поставленных дидактических целей, что отражается и в модульном обучении, название которого связано с международным понятием "модуль", одно из значений которого – функциональный узел. В модульном обучении педагог исполняет консультативно-координирующую, а не информационную функцию.

Основное средство модульного обучения – программа, состоящая из отдельных модулей. Каждый модуль состоит из блоков занятий и имеет различный уровень интегрирования.