оформлять деловые документы. Данное умение формируется на лабораторных занятиях курса.

Особенностью подготовки к лабораторным занятиям является выполнение студентами творческой деятельности. К каждому лабораторному занятию студенты, руководствуясь образцами оформления деловых документов, самостоятельно придумывают ситуацию, по которой создается конкретный вид документа (объяснительная записка, протокол, приказ, письмо и др.), содержание текста, реквизиты документа. Выполнение подобной деятельности способствует развитию таких составляющих творческих способностей как способности анализировать, описывать явления, выделять главное, способности к фантазии, к прогнозированию результата.

ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© Д.А. Пищальников

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый уравнением

$$\dot{x} + bx = u \tag{1}$$

с ограничением $|u(t)| \le 1$, где b – действительная постоянная, а $x(0) = x_0$.

а) Покажем, что при $b \ge 0$ можно из каждой начальной точки x_0 достигнуть начала координат $x_1 = 0$.

б) При $b < 0$ определим множество начальных точек, из которых можно достигнуть начала координат.

в) Покажем, что оптимальное по быстродействию управление имеет вид $u^* = -\operatorname{sgn} x$.

Р е ш е н и е. Как известно, решение $x(t)$ задачи (1), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$, имеет вид:

$$x(t) = e^{-bt}x_0 + e^{-bt}\int_0^t e^{bs}u(s)ds\,. \tag{*}$$

а) Покажем, что при $b \ge 0$ можно из каждой начальной точки x_0 достигнуть начала координат $x_1 = 0$.

Для этого необходимо показать, что при $b \ge 0$ для любой точки x_0 существует допустимое управление $u(t)$, что для траектории $x(t)$, соответствующей этому управлению, существует такая точка $\tau \in [0,\infty)$, в которой выполняется равенство $x(\tau) = 0$.

Рассмотрим допустимое управление $u(t) = -\operatorname{sgn} x_0$ и найдем момент времени τ, для которого $x(\tau) = 0$.

Из (*) и условия $x(\tau) = 0$ находим, что $-x_0 = -\operatorname{sgn} x_0 \int_0^\tau e^{bs}ds$, откуда получаем $|x_0| = \frac{1}{b}(e^{b\tau} - 1)$ или $\tau = \frac{1}{b}\ln(b|x_0| + 1)$.

Очевидно, что при $b > 0$ момент времени τ существует всегда, т. е. при $b > 0$ с помощью управления $u(t) = -\operatorname{sgn}x_0$ можно попасть из любого начального положения x_0 в начало координат за конечный промежуток времени.

Если $b = 0$, то из формулы (*) получаем $\tau = |x_0|$.

б) Рассмотрим случай $b < 0$.

Определим множество всех точек $x_0 \in R$, для каждой из которых существует допустимое управление $u(t)$ и точка $\tau \in [0,\infty)$, в которой траектория $x(t)$, соответствующая управлению $u(t)$, удовлетворяет равенству $x(\tau) = 0$.

Аналогично пункту а), из равенства (*) и условия $x(\tau) = 0$ находим, что

$$x_0 = -\int_0^\tau e^{bs}u(s)ds\,.$$

Обозначим через

$$X_0 = \{x_0 \in R\colon \exists\ \tau \in [0, \infty) \text{ и } \exists\ u(t)\ (-1 \le u(t) \le 1),\ x_0 = -\int_0^\tau e^{bs}u(s)ds\},$$

а через

$$X_\tau = \{-\int_0^\tau e^{bs}u(s)ds\ : -1 \le u(t) \le 1\},$$

тогда

$$X_0 = \bigcup_{\tau \in [0,\infty)} X_\tau\,.$$

Покажем, что X_0 – непрерывное множество.

Сначала докажем, что X_τ – выпуклое множество.

Используем условие, что $-1 \le u(t) \le 1$, откуда

$$-e^{bs} \le u(t)e^{bs} \le e^{bs}$$

$$-\int_0^\tau e^{bs}ds \le -\int_0^\tau e^{bs}u(s)ds \le \int_0^\tau e^{bs}ds\,. \tag{2}$$

Из последнего двойного неравенства следует, что $-\int_0^\tau e^{bs}ds$ и $\int_0^\tau e^{bs}ds$ являются крайними точками множества X_τ.

Для того чтобы показать, что X_τ – выпуклое множество, нужно показать, что для любых двух $-\int_0^\tau e^{bs}u_1(s)ds$ и $-\int_0^\tau e^{bs}u_2(s)ds$, где **u₁(s)** и **u₂(s)** – два любых допустимых управления, и для любого $\lambda \in [0,1]$ выполняется условие:

$$-\int_0^\tau e^{bs}ds \le -\lambda\int_0^\tau u_1(s)e^{bs}ds -$$

$$-(1-\lambda)\int_0^\tau u_2(s)e^{bs}ds \le \int_0^\tau e^{bs}ds\,. \qquad (3)$$

Рассмотрим два любых допустимых управления $\mathbf{u_1}$ и $\mathbf{u_2}$, тогда для любого $\lambda \in [0,1]$ управление $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2$ также будет допустимым, т. к. $|\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2| \le 1$, тогда по (2) получим $-\int_0^\tau e^{bs}ds \le$ $\le -\int_0^\tau(\lambda u_1(s)+(1-\lambda)u_2(s))e^{bs}ds \le \int_0^\tau e^{bs}ds$, откуда получаем условие (3).

Таким образом, мы показали, что X_τ – выпуклое множество, т. е.

$$X_\tau = [-\int_0^\tau e^{bs}ds\,,\ \int_0^\tau e^{bs}ds\,].$$

Возьмем любые $\tau_1, \tau_2 \in [0,\infty) : \tau_1 < \tau_2$.

Так как $\int_0^{\tau_1} e^{bs}ds < \int_0^{\tau_2} e^{bs}ds$ и X_{τ_1}, X_{τ_2} – выпуклые, то

$$X_{\tau_1} \subset X_{\tau_2}\,.$$

Найдем $\lim\limits_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{bs}ds = \lim\limits_{\tau\to\infty}\frac{1}{b}(e^{b\tau}-1) = -\frac{1}{b}$, т. е.

$$X_\infty = [\frac{1}{b}, -\frac{1}{b}].$$

Тогда для $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \infty$ имеем:

$$X_{\tau_1} \subset X_{\tau_2} \subset \ldots \subset X_\infty\,.$$

Но так как $\tau \in [0,\infty)$, то

$$X_0 = \bigcup_{\tau\in[0,\infty)} X_\tau = (\frac{1}{b}, -\frac{1}{b}).$$

в) Покажем, что $\mathrm{sgn}x = \mathrm{sgn}x_0$ (см. рис. 1 для $x_0 > 0$).

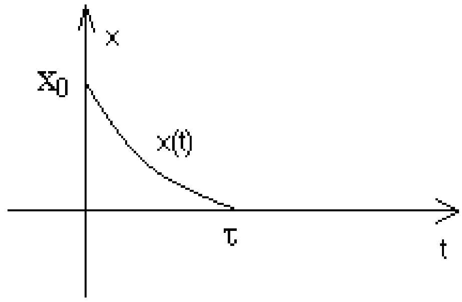

Рис. 1. $x_0 > 0$

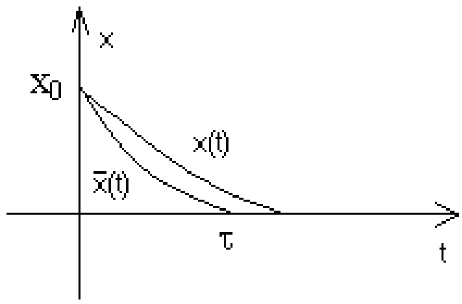

Рис. 2.

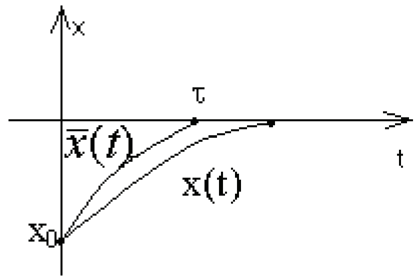

Рис. 3.

Аналогичная геометрическая интерпретация того, что $\mathrm{sgn}x = \mathrm{sgn}x_0$ получается и в случае, если $x_0 < 0$.

Пусть τ – момент времени достижения траекторией $x(t)$ начала координат из начального положения x_0 с помощью управления $u = -\mathrm{sgn}x_0$.

Рассмотрим две траектории – при управлении $u = -\mathrm{sgn}x_0$ и произвольном допустимом управлении u:

$$\bar{x}(t) = e^{-bt}x_0 - e^{-bt}\,\mathrm{sgn}\,x_0\int_0^t e^{bs}ds$$

$$x(t) = e^{-bt}x_0 + e^{-bt}\int_0^t e^{bs}u(s)ds\,. \qquad (4)$$

Возможны два случая:

1) $x_0 > 0$.

Тогда $\mathrm{sgn}x_0 = 1$ и из (4) следует, что $\bar{x}(t) \le x(t)$ для любого допустимого управления $u(s)$.

Таким образом, момент времени τ достижения траекторией $\bar{x}(t)$ начала координат будет более ранним, чем для траектории $x(t)$ (см. рис. 2).

2) $x_0 < 0$.

Тогда $\mathrm{sgn}x_0 = -1$ и из (4) следует, что $\overline{x}(t) \geq x(t)$ для любого допустимого управления $u(s)$.

Аналогично пункту а), траектория $\overline{x}(t)$ достигнет начала координат раньше, чем траектория $x(t)$ (см. рис. 3).

Объединяя оба пункта, получаем, что $u = -\mathrm{sgn}x$ является оптимальным по быстродействию управлением для линейного дифференциального уравнения первого порядка.

О НЕПРАВИЛЬНОЙ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ «ДВИЖЕНИЕ ПО РЕКЕ» И МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ С ОПОРОЙ НА ИНВАРИАНТ

© В.Ю. Лыскова

Обучение решению задач «движение по реке (5–7 класс)» предполагает изначально, что математическая модель задачи у ученика правильная. Однако трудности, с которыми сталкивается ученик, не понимающий, как решать задачу, с нашей точки зрения связаны прежде всего с неправильной моделью задачи в мышлении ученика. Под неправильной моделью будем понимать такую модель, в которой ученик не выделяет инвариант, то есть правило, которое лежит в основе задачи.

З а д а ч а. За 4 часа по течению моторная лодка прошла такое же расстояние, как за 5 часов против течения. Найдите собственную скорость моторной лодки, если скорость течения реки 2 км/ч.

Неправильная модель Бориса. Борис сразу же вывел соотношения для скорости лодки по течению – как скорость лодки + скорость реки, против течения – как разность скорости лодки минус скорости реки. Казалось бы, что еще тут может быть непонятного? Приведем дословно его рассуждение. Борис рассуждал вслух – скорость моторной лодки по течению – 2 км/ч, обратно – 7 км/ч. Нет, обратно скорость будет меньше 5 км/ч, нет 6,5 км/ч, нет, наверное, 6 км/ч. Понравилось и окончательное его мнение – 3 км/ч по течению, 7 км/ч обратно. Нас насторожило слово обратно. Мы спросили – почему? Почему скорость самой моторной лодки изменяется, ей что, мотор на обратном пути добавили, но ведь об этом ничего в задаче не сказано. На что Борис говорит: обратно скорость должна быть больше, чтобы доехать за то же самое время (!), ведь река течет навстречу, и это замедляет движение лодки. Мы пояснили ему – в задаче сказано, что по течению лодка плыла 4 часа, а против течения – 5 часов. Она и плыла больше по времени, так как ей мешала река. Проблема ученика состоит в том, что он не выделяет инвариант – расстояние. Безусловно, это не оговорка, и Борис не спутал время с расстоянием. Борис все вывел согласно своей неправильной модели. В его модели отсутствовал инвариант задачи – расстояние. Мы предполагаем, что произошло это из-за того, что инвариант задачи (расстояние) не изменяется, а в модели мышления Бориса возникают трудности с отслеживанием инвариантов. Предлагаемый нами метод позволяет сформировать правильную модель этого типа задач с опорой на инвариант.

Таблица 1

Правильная модель задачи «движение по реке»

Мат. модель движения. $v = s / t$ Объекты	Параметры	Формализация	Отношения и связи
Река	1) Скорость реки	$v_{\text{р(еки)}}$	2
	2) Время течения реки	$t_{\text{р(еки)}}$	
	3) Расстояние для реки	$s_{\text{р(еки)}}$	
Лодка	4) Собственная скорость лодки	$v_{\text{л(одки)}}$	
	5) Время лодки	$t_{\text{л(одки)}}$	
	6) Расстояние лодки	$s_{\text{л(одки)}}$	
Лодка по течению	7) Скорость лодки по течению	$v_{\text{по(течению)}}$ увеличивается за счет течения	$v_{\text{по}} = v_{\text{р}} + v_{\text{л}}$
4	8) Время движения лодки по течению	$t_{\text{по(течению)}}$	
=	9) Расстояние, пройденное лодкой по течению	$s_{\text{по(течению)}}$	
Лодка против течения	10) Скорость лодки против течения	$v_{\text{против}}$ уменьшается за счет течения	$v_{\text{против}} = v_{\text{р}} - v_{\text{л}}$
5	11) Время движения лодки против течения	$t_{\text{против}}$	
=	12) Расстояние, пройденное лодкой против течения	$s_{\text{против}}$	
Строка **инварианта** решения $s_{\text{против}} = s_{\text{по(течению)}}$			