ПОЛНОТА СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФЕ-ПУЧКЕ В ПРОСТРАНСТВЕ С СУММИРУЕМЫМ КВАДРАТОМ

© **В. В. Провоторов**

Если процесс в сложной системе, являясь динамическим, описывается линейными уравнениями в частных производных, то естественным является вопрос применимости метода Фурье, приводящий к важной задаче: разложению заданной функции по собственным функциям соответствующей задачи Штурма–Лиувилля на сети [1, с. 33]. Ниже рассматривается модельный случай, когда сеть представляет собой пучок, состоящий из трех физически одинаковых одномерных континуумов (трех ребер с одним узлом). К таким задачам приходят, например, при моделировании колебательных процессов упругой мачты с поддерживающими упругими растяжками [2]. Все рассуждения без особых затруднений переносятся на случай произвольного числа ребер графа.

Пусть $\gamma_k = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $(k = 1, 2)$, $\gamma_3 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Обозначим $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{3} \gamma_k$; очевидно $\bar{\Gamma} = \bigcup\limits_{k=1}^{3} \bar{\gamma}_k$. Множество $\bar{\Gamma}$ представляет собой граф-пучок с узлом $\frac{\pi}{2}$. На графе $\bar{\Gamma}$ рассмотрим множество $\Im$ функций $y\,(x) \in C\left(\bar{\Gamma}\right) \cap C^2\,(\Gamma)$ (непрерывность в узле $\frac{\pi}{2}$ означает выполнение соотношений $y\,(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar{\gamma}_1} = \quad y\,(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar{\gamma}_2} = y\,(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar{\gamma}_3}$), производные которых в точках $\frac{\pi}{2} \in \bar{\gamma}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ (т.е. в узле $\frac{\pi}{2}$) удовлетворяют условиям согласования (условия трансмиссии [1, с. 27]):

$$\sum_{k=1}^{2} y'\,(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar{\gamma}_k} = y'\,(x)_{x=\frac{\pi}{2}\in\bar{\gamma}_3}\,. \tag{1}$$

На функциях $y\,(x) \in \Im$ рассмотрим краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q\,(x)\,y = \lambda y, \tag{2}$$

$$\left(y'\,(x) - hy\,(x)\right)_{x=0\in\bar{\gamma}_k} = 0\ (k = 1, 2), \quad \left(y'\,(x) + Hy\,(x)\right)_{x=\pi\in\bar{\gamma}_3} = 0, \tag{3}$$

здесь λ — спектральный параметр; $q(x)$, $h, H > 0$ — вещественные; $q(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $q(x)_{\bar{\gamma_1}} = q(x)_{\bar{\gamma_2}} = q(\pi - x)_{\bar{\gamma_3}}$.

Пусть функции $u\,(x, \lambda)\,,\ v\,(x, \lambda) \in C\,[0, \pi] \cap C^2\,(0, \pi)$ — решения уравнения (2), удовлетворяющие начальным условиям $u\,(0, \lambda) = 1$, $u'\,(0, \lambda) = h$, $v\,(\pi, \lambda) = 1$, $v'\,(\pi, \lambda) = -H$, соответственно.

Пусть $D(\lambda) = 2u'(\frac{\pi}{2}, \lambda)v(\frac{\pi}{2}, \lambda) - v'(\frac{\pi}{2}, \lambda)u(\frac{\pi}{2}, \lambda)$. Обозначим Ω', Ω'' — множества чисел $\{\lambda_n\}$ для которых $D(\lambda_n) = 0$, $u(\frac{\pi}{2}, \lambda_n) = 0$ соответственно; Ω — множество собственных значений краевой задачи (2), (3).

Т е о р е м а 1. *Имеет место* $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$ $(\Omega' \cap \Omega'' = \emptyset)$, *причем каждое собственное значение является простым нулем функции* $D(\lambda)$ $(\lambda \in \Omega')$ *или* $u(\frac{\pi}{2}, \lambda)$ $(\lambda \in \Omega'')$.

Т е о р е м а 2. *Система собственных функций* $\{\psi\,(x, \lambda_n)\}_{n\geqslant 0}$ *краевой задачи* (2), (3) *полна и образует ортогональный базис в* $L^2\,(\Gamma)$.

Доказательство теоремы основано на методе, который играет важную роль в исследовании прямых и обратных задач спектрального анализа для многих классов операторов — методе интегрирования резольвенты по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра [3, с. 21]. Для функции $f(x) \in L^2(\Gamma)$, ортогональной всем собственным функциям краевой задачи (2), (3), рассматривается истокообразно представимая функция $y(x,\lambda) = \int\limits_{\Gamma} G(x,t,\lambda)f(t)dt$ ($G(x,t,\lambda)$ — функция Грина краевой задачи (2), (3). Устанавливается, что вычеты функции $y(x,\lambda)$ при $\lambda = \lambda_n$ (λ_n — собственные значения краевой задачи (2), (3) равны нулю. Это, и асимптотические формулы для $G(x,t,\lambda)$, приводит к $f(x) = 0$ п.в. на Γ. Метод контурного интегрирования применим также для получения условий разложимости заданной функции на графе $\bar{\Gamma}$ по собственным функциям краевой задачи (2), (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2004. 227 с.
2. Провоторов В.В. Математическое моделирование колебательных процессов поддерживающих растяжек упругой мачты // Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. Воронеж, 2006. № 2. С. 28–35.
3. *Юрко В.А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Изд-во Саратовского педагогического института, 2001. 499 с.

Провоторов Вячеслав Васильевич
Воронежский государственный ун-т
Россия, Воронеж
e-mail: wwprov@math.vsu.ru

Поступила в редакцию 5 мая 2007 г.

К АНАЛИЗУ МОДЕЛИ КРЕДИТНО–ИНВЕСТИЦИОННЫХ РЕСУРСОВ ПРЕДПРИЯТИЯ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВОЗМУЩЕНИЕМ

© **Д. Н. Протасов**

Рассматривается экономико-математические модели, основанные на решении обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями, описывающих различные способы инвестирования в бизнесе (самофинансирование, государственная поддержка, кредитование). Данные модели позволяют исследовать динамику развития различных предприятий в зависимости от выбранных инвестиционных стратегий: «чистых» (использование одного