УДК 517.925.52, 519.62

О ПОСТРОЕНИИ ОБОБЩЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

© А. Н. Пчелинцев

Ключевые слова: обобщенно-периодические решения; распределенная компьютерная среда.

Аннотация: В работе приводится описание алгоритма построения обобщенно-периодических решений динамических систем в распределенной компьютерной среде с использованием символьных вычислений.

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$ — векторная функция действительного переменного t, $f = (f_1, ..., f_n)$ — векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными $\partial f_i / \partial x_j$ $(i, j = \overline{1, n})$ в некотором открытом подмножестве евклидова векторного пространства $\mathbb{R}^n$.

Во избежание возможных разночтений приведем следующее определение.

О п р е д е л е н и е. Пусть решение $\varphi(t)$ системы (1) определено и ограничено для всех $t \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что решение $\varphi(t)$ является обобщенно-периодическим, если для каждой пары ε, T положительных чисел можно указать такое натуральное число N, что при $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$|\varphi(t) - \varphi(t + NT)| < \varepsilon.$$

Простейшими примерами таких решений могут служить периодическое решение и положение равновесия. Также частным случаем обобщенно-периодического решения является почти периодическое решение (см. [1, с. 162]).

Существование обобщенно-периодических решений определяет теорема, приведенная в работе [1, с. 146, 147]. Более того, как показано в книге [1], обобщенно-периодическим решением может быть решение, траектория которого рекуррентна, и обратно. Данная теорема намечает путь, метод и алгоритм отыскания обобщенно-периодических решений в распределенной вычислительной среде с использованием символьных вычислений.

Пусть пространство Σ представляет n-мерный куб, ребро которого равно a, и величина ε является точностью отыскания обобщенно-периодических решений. Разобьем пространство Σ на кубы с ребрами, длина которых равна 2ε. Количество таких кубов будет равно

$$m = \left[\frac{a}{2\varepsilon}\right]^n.$$

Внутри i-го куба $(i = \overline{1, m})$ возьмем точку $P_i^{(0)}$, которая лежит в его центре и является начальной для некоторого решения $x\left(t, P_i^{(0)}\right)$ системы (1). Среди таких решений будем искать обобщенно-периодические. Траекторию, соответствующую точке $P_i^{(0)}$, обозначим через L_i.

Сначала сформируем множество начальных точек рекурсивным алгоритмом перебора с возвратом (то есть алгоритмом формирования узлов n-мерной сетки). Дальнейшие вычисления для

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №07-07-00170).

каждой точки $P_i^{(0)}$ не будут зависеть от расчетов для соседних точек, что позволяет реализовать их в распределенной компьютерной среде. Тогда координаты начальных точек $P_i^{(0)}$ будем хранить в сетевой базе данных, обслуживаемой, например, СУБД MySQL.

Теперь разложим решение $x\left(t, P_i^{(0)}\right)$ в степенной ряд по t на некотором отрезке $[0, T]$, где величина T задается. Следовательно, перед началом расчетов в базу данных необходимо записать множество символьных выражений для производных ряда до некоторого заданного порядка. Это множество может быть получено символьным дифференцированием правой части системы (1) с помощью пакета символьных вычислений Maxima в распределенной компьютерной среде. Подставляя в ряд значение времени T, с некоторой точностью Δ вычислим координаты точки $P_i^{(1)}$, которая получена сдвигом точки $P_i^{(0)}$ по траектории L_i на время T, которое будем называть сдвигом. При этом мы можем остаться в ε-окрестности точки $P_i^{(0)}$ в силу непрерывной зависимости решения от начальных условий. Тогда зададимся некоторым минимальным числом N_{min} сдвигов, начиная с которого начнем отслеживать возврат в ε-окрестность точки $P_i^{(0)}$.

Чтобы получить точку $P_i^{(2)}$ через второй сдвиг, перенесем начальную точку по траектории L_i в точку $P_i^{(1)}$. Когда номер текущего сдвига $j \geqslant N_{min}$, проверяем условие

$$\left|P_i^{(j)} - P_i^{(0)}\right| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Если оно выполняется, то точка $P_i^{(0)}$ является начальной для обобщенно-периодического решения (номер сдвига, при котором имеет место неравенство (2), обозначим через s_i). В противном случае продолжаем делать сдвиги по траектории L_i до некоторого заданного числа N_{max} сдвигов.

Если при расчетах не достаточно имеющихся в базе данных символьных выражений для производных, то анализируемая точка помечается как недосчитанная, и после анализа всех точек база данных сканируется на наличие хотя бы одной такой точки. Если недосчитанные точки имеются, то опять запускается процедура символьного дифференцирования для получения очередного множества производных.

Описанный алгоритм был использован для построения обобщенно-периодических решений системы Лоренца

$$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1),\ \dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3,\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3$$

при классических значениях ее параметров, то есть $\sigma = 10$, $r = 28$ и $b = 8/3$. Например, для одного из найденных решений $P_1^{(0)}(7,94796442, 12,58880493, 18,13439637)$, $s_1 = 10530$, $\varepsilon = 0,11$, $T = 0,001$, $a = 0,44$, $\Delta = 10^{-8}$, $N_{min} = 10$, $N_{max} = 11000$, центром куба Σ является точка $M(8,05796442, 12,69880493, 18,24439637)$, взятая вблизи аттрактора Лоренца.

Исходные тексты программы на языке C++ отыскания обобщенно-периодических решений динамических систем в распределенной вычислительной среде можно найти по адресу, указанному в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.

2. *Пчелинцев А.Н.* Программа для ЭВМ отыскания обобщенно-периодических решений динамических систем в распределенной вычислительной среде (свидетельство о государственной регистрации программы №2008615550). URL: http://cluster.tstu.ru/tiki-download_file.php?fileId=2 (Дата обращения 20. 11. 2008).

Abstract: In the work there is given a description of the algorithm of a construction of the generally periodical solutions of the dynamic systems in a distributed computing environment with the using of a symbolic calculations.

Keywords: generally periodical solutions; distributed computing.

Пчелинцев Александр Николаевич
аспирант
Тамбовский государственный
технический университет
Россия, Тамбов
e-mail: pchela9091@rambler.ru

Aleksander Pchelintsev
post-graduate student
Tambov State
Technical University
Russia, Tambov
e-mail: pchela9091@rambler.ru

УДК 517.911, 517.93

СТАТИСТИЧЕСКИ ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ [1]

© Л. И. Родина, Е. Л. Тонков

Ключевые слова: управляемые системы, динамические системы, дифференциальные включения, множество достижимости, инвариантность.

Аннотация: В терминах функций Ляпунова получены условия, позволяющие оценивать относительную частоту пребывания множества достижимости управляемой системы в заранее заданном множестве. Исследуются статистически инвариантные и статистически слабо инвариантные множества относительно управляемой системы.

В этом докладе сообщается о результатах исследования статистически инвариантных множеств, опубликованных в $[1, 2]$, и рассмотрен ряд новых задач, связанных со свойствами статистических характеристик асимптотического поведения множеств достижимости управляемых систем.

Пусть задана топологическая динамическая система (Σ, h^t). Это означает, что на полном метрическом пространстве Σ задана *однопараметрическая группа преобразований* h^t пространства Σ в себя, непрерывная по (t, σ) и удовлетворяющая начальному условию $h^t\sigma|_{t=0} = \sigma$. Для заданного множества $U \subset \mathbb{R}^m$ рассмотрим пространство с мерой $(U, \mathfrak{A}, \eta)$, где $\mathfrak{A}$ — борелевская сигма-алгебра подмножеств U, η — мера Радона, сосредоточенная на множестве U. Мерой Радона с носителем U называется конечная регулярная счетно-аддитивная функция $\eta : A \to \mathbb{R}$ множеств $A \in \mathfrak{A}$.

Пусть задана непрерывная функция $f(\sigma, x, u)$ переменных $(\sigma, x, u) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Мы рассматриваем управляемую систему

$$\dot{x} = \int_U f(h^t\sigma, x, u)\eta_t(du), \tag{7}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН №29 «Математическая теория управления».