

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ ЕДИНИЦА ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ¹

© Л. И. Родина

Эта работа продолжает исследования Е. А. Панасенко и Е. Л. Тонкова [1] условий существования инвариантных и устойчиво инвариантных множеств детерминированных дифференциальных включений. Здесь исследуются условия, при которых данные свойства выполнены с вероятностью единица.

Пусть задана динамическая система $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, f^t)$, где $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$ — вероятностное пространство с инвариантной мерой ν , f^t — поток на Σ . Рассмотрим семейство дифференциальных включений

$$\dot{x} \in F(f^t \sigma, x), \quad (1)$$

где функция $(\sigma, x) \rightarrow F(\sigma, x)$ определена на $\Sigma \times \mathbb{R}^n$ и принимает значения в $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$.

У с л о в и е 1. Функция $x \rightarrow F(f^t \sigma, x)$ непрерывна при фиксированных (t, σ) ; для каждой точки $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ функция $t \rightarrow |F(f^t \sigma, x)| \doteq \max\{|y| : y \in F(f^t \sigma, x)\}$ измерима и для любого $r > 0$ найдется измеримая и ограниченная в существенном на $\mathbb{R}$ функция $t \rightarrow k_r(t)$ такая, что $|F(f^t \sigma, x)| \leq k_r(t)$ для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times O_r$ и почти всех $t \in \mathbb{R}$.

Условие 1 обеспечивает при каждом $\sigma \in \Sigma$ существование локального решения задачи Коши для «овыпукленного» дифференциального включения

$$\dot{x} \in \text{co}F(f^t \sigma, x), \quad x(0) = x_0. \quad (2)$$

У с л о в и е 2. Для каждого $\sigma \in \Sigma$ и любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ всякое решение задачи (2) определено при всех $t \geq 0$.

Предполагаем, что динамическая система $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$ служит расширением системы $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, f^t)$ и строится по включению (2). Система $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$ называется *расширением* системы $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, f^t)$, если существует непрерывная проекция p пространства Ω на Σ , сопрягающая потоки, то есть $p(\Omega) = \Sigma$ и $pg^t = f^t p$. При этом определим $\mathfrak{B} = p(\mathfrak{A})$ и $\mu(Q) = \nu(pQ)$ для всякого $Q \in \mathfrak{B}$.

Пусть $\Omega \doteq \Sigma \times \text{cm}(\mathbb{R}^n)$ и задана функция $M : \Omega \rightarrow \text{cl}(\mathbb{R}^n)$. Построим множество $\mathfrak{M} \doteq \{\omega = (\sigma, X) \in \Omega : X \subset M(\sigma)\}$ и его r -окрестность $\mathfrak{M}^r$.

О п р е д е л е н и е 1. Множество $\mathfrak{M} \in \mathfrak{B}$ называется *положительно инвариантным с вероятностью 1* (относительно потока g^t), если для почти всех $\omega \in \mathfrak{M}$ относительная частота попадания движения $t \rightarrow g^t \omega$ в множество $\mathfrak{M}$ равна 1 :

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}\{t \in [0, \vartheta] : g^t \omega \in \mathfrak{M}\}}{\vartheta} = 1,$$

где mes — мера Лебега на прямой.

О п р е д е л е н и е 2. Множество $\mathfrak{M} \in \mathfrak{B}$ называется *устойчивым по Ляпунову с вероятностью 1*, если оно положительно инвариантно с вероятностью 1 и для любого

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 06-01-00258).

$\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для почти всех $\omega \in \mathfrak{M}^\delta$ относительная частота попадания движения $t \rightarrow g^t \omega$ в множество $\mathfrak{M}^\varepsilon$ равна 1.

Если множество $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову с вероятностью 1 и существует такое $r > 0$, что $\mu\{\omega \in \mathfrak{M}^r : \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_\Omega(g^t \omega, \mathfrak{M}) = 0\} = 1$, то $\mathfrak{M}$ называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову с вероятностью 1*.

О п р е д е л е н и е 3. Функция $V : \mathfrak{M}^r \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией Ляпунова* (относительно множества $\mathfrak{M}$), если $V(\omega) = 0$ для всех $\omega \in \text{fr } \mathfrak{M}$ и $V(\omega) > 0$ для всех $\omega \in \mathfrak{M}^r \doteq \mathfrak{M}^r \setminus \mathfrak{M}$. Функция Ляпунова V называется *определенно положительной* (относительно $\mathfrak{M}$), если для любого $\varepsilon \in (0, r)$ найдется такое $\delta > 0$, что $V(\omega) \geq \delta$ при всех $\omega \in \mathfrak{M}^r \setminus \text{int } \mathfrak{M}^\varepsilon$. Для локально липшицевой функции $V : \mathfrak{M}^r \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим через $V^o(\omega; q)$ производную Ф. Кларка [2] функции $V(\omega)$ по направлению вектора $q = (\tau, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Если $q_0 = (1, h)$, то $V_F^o(\omega) \doteq \max_{h \in F(\omega)} V^o(\omega; q_0)$ называется *производной функции V в силу включения (2)*.

Для всех $\omega \in \mathfrak{M}^r$ определим функцию $W(\omega) = \varrho(x, M(\sigma)) \doteq \min_{y \in M(\sigma)} |x - y|$. Обозначим через $k(\vartheta, \varphi)$ число точек выхода решения $\varphi(t, \sigma, x_0)$ из множества $\mathfrak{M}$ на отрезке $[0, \vartheta]$, через $k(\vartheta, \sigma, x_0)$ — наибольшее из чисел $k(\vartheta, \varphi)$ для всех решений $\varphi(t, \sigma, x_0)$, траектории которых составляют границу интегральной воронки включения (2) на $[0, \vartheta]$.

Т е о р е м а 1. Пусть динамическая система $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, f^t)$ эргодическая и выполнены условия 1 и 2. Предположим, что для некоторого $r > 0$ функция $W : \mathfrak{M}^r \rightarrow \mathbb{R}$ локально липшицева и удовлетворяет условиям:

- 1) $W_F^o(\omega)$ определено отрицательная с вероятностью 1 относительно $\mathfrak{M}$;
- 2) для всех $\omega = (\sigma, x) \in \text{int } \mathfrak{M}^r$ функция $k(t, \sigma, x)/t$ ограничена на (t_0, ∞) , где $t_0 > 0$.

Тогда множество $\mathfrak{M}$ положительно инвариантно с вероятностью 1.

Пусть $N^r(\sigma) \doteq M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$, $\xi(\sigma) \doteq \max_{x \in \text{cl } N^r(\sigma)} V_F^o(\omega)$ — наибольшее значение производной $V_F^o(\omega)$ в множестве $\text{cl } \mathfrak{M}^r$ при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$. Обозначим через $M\xi$ математическое ожидание функции $\xi(\sigma)$, то есть $M\xi \doteq \int_\Sigma \xi(\sigma) \nu(d\sigma)$.

Т е о р е м а 2. Пусть динамическая система $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, f^t)$ эргодическая и выполнены условия (1) и (2). Если для некоторого $r > 0$ существует локально липшицева функция Ляпунова $V : \mathfrak{M}^r \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $M\xi < 0$, то множество $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво по Ляпунову с вероятностью 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды МИАН. 2008. (в печати)
2. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.

Родина Людмила Ивановна
Удмуртский государственный ун-т
Россия, Ижевск
e-mail: rdl@uni.udm.ru

Поступила в редакцию 7 мая 2007 г.