Симонов Пётр Михайлович
д. ф.-м. н., профессор
Пермский государственный университет
Россия, Пермь
e-mail: simonov@econ.psu.ru

Petr Simonov
doctor of phys.-math. sciences, professor
Perm State University,
Russia, Perm
e-mail: simonov@econ.psu.ru

Чистяков Александр Владимирович
к. ф.-м. н., доцент
Удмуртский государственный университет
Россия, Ижевск
e-mail: simpm@mail.ru

Aleksandr Chistyakov
candidate of phys.-math. sciences, senior lecturer
Udmurtian State University
Russia, Izhevsk
e-mail: simpm@mail.ru

УДК 517.977.5

МОНОТОННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ [1]

© С. П. Сорокин

Ключевые слова: функции Ляпунова; неравенства Гамильтона-Якоби; множество достижимости; условия оптимальности.

Аннотация: В докладе речь пойдет об оценках множеств достижимости и связанных с ними необходимых и достаточных условиях оптимальности в задачах управления; оценки и условия оптимальности основаны на использовании семейств функций типа Ляпунова - решений неравенств Гамильтона-Якоби.

Решения неравенств и уравнения Гамильтона–Якоби (то есть функции типа Ляпунова, Кротова, Беллмана) находят широкое применение в теории управления при изучении вопросов инвариантности, достижимости, управляемости и оптимальности [1–4]. В докладе речь пойдет об аппроксимациях и точном описании множества достижимости (точнее, множества соединимых точек) управляемой системы, оценках целевого функционала задачи и условиях оптимальности. Ключевую роль в подходе играет оперирование *произвольными множествами* таких функций.

Приведем некоторые из указанных результатов применительно к следующей задаче оптимального управления (P_Δ) с общими (не разделенными) концевыми ограничениями:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u(t) \in U, \tag{1}$$

$$\big(x(t_0), x(t_1)\big) \in C,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-00741) и СО РАН (интеграционный проект СО РАН–УрО РАН № 85).

$$J\big(x(\cdot),u(\cdot)\big)=l\big(x(t_0),x(t_1)\big)\to\inf .$$

Здесь $\Delta=[t_0,t_1]$ – фиксированный отрезок времени, $\big(x(\cdot),u(\cdot)\big)\in AC(\Delta,\mathbb{R}^n)\times L_\infty(\Delta,U)$ – процесс системы, множество $U\subset\mathbb{R}^m$ компактно, C замкнуто, множество скоростей системы $f(t,x,U)$ выпукло, функция f непрерывна и липшицева по x равномерно по (t,u), l – непрерывна.

Введем множество точек, соединимых траекториями системы (1):

$$\mathcal{R}:=\{(x_0,x_1)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\mid\exists\,x(\cdot):x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1\}.$$

Рассмотрим два неравенства Гамильтона–Якоби

$$\varphi_t(t,x,y)+\max\{\varphi_x(t,x,y)\cdot f(t,x,u)\mid u\in U\}\leqslant 0 \text{ п.в. на } \Delta\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$\varphi_t(t,x,y)+\max\{\varphi_x(t,x,y)\cdot f(t,x,u)\mid u\in U\}\geqslant 0 \text{ п.в. на } \Delta\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, \tag{3}$$

в качестве решений которых будем рассматривать локально липшицевые (для (2)) и локально липшицевые и полувогнутые по (t,x) (для (3)) функции $\varphi(t,x,y)$, зависящие от y как от параметра и удовлетворяющие условию согласования

$$\varphi(t_0,x,x)\leqslant 0\Leftrightarrow x\in pr_{x_0}C,$$

в предположении, что множество $pr_{x_0}C$ замкнуто. Множество решений неравенства (2) обозначим через Φ_+, а неравенства (3) — через Φ_-.

Отметим, что функции из Φ_+ обладают свойством сильной монотонности — они не возрастают вдоль всех траекторий системы (1), а функции из Φ_- являются слабо монотонными — для каждой $\varphi\in\Phi_-$ существует траектория системы (1), вдоль которой φ не убывает. Все такие функции мы называем функциями типа Ляпунова или L-функциями.

Введем оценивающее множество, порожденное L-функцией φ:

$$E(\varphi):=\{(x_0,x_1)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\mid\varphi(t_1,x_1,x_0)\leqslant 0;\ \ \varphi(t_0,x_0,x_0)\leqslant 0\}.$$

Следующая теорема об аппроксимациях и точном описании множества $\mathcal{R}$ обобщает некоторые результаты работ [2, 4] на задачи с общими концевыми ограничениями (P_Δ).

Т е о р е м а 1. *а) Любое множество функций $\Phi\subset\Phi_+$ дает внешнюю аппроксимацию множества соединимых точек:*

$$\bigcap_{\varphi\in\Phi}E(\varphi)\supset\mathcal{R}.$$

б) Любое множество функций $\Phi\subset\Phi_-$ дает внутреннюю аппроксимацию множества соединимых точек:

$$\bigcup_{\varphi\in\Phi}E(\varphi)\subset\mathcal{R}.$$

в) Существует такая полувогнутая функция $\varphi\in\Phi_+\cap\Phi_-$, что

$$E(\varphi)=\mathcal{R}.$$

Сделаем ряд замечаний к теореме.

З а м е ч а н и е 1. Появление параметра в числе аргументов L-функций на первый взгляд может показаться неожиданным, однако оно вполне естественно, так как речь идет об аппроксимации множества в пространстве $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

З а м е ч а н и е 2. Оперирование произвольными множествами L-функций, с одной стороны, нацелено на получение предельно подходящих оценок множества соединимых точек, а с другой –

в конкретных задачах это позволяет более широко использовать гладкие L-функции [3, 4] вместо существенно негладких (скажем, полунепрерывных).

На основе теоремы 1 получаются нижние и верхние оценки точной нижней грани целевого функционала задачи (P_Δ), а также соответствующие достаточные и необходимые условия локальной и глобальной оптимальности. Отметим, что эти достаточные условия являются предпочтительными по гибкости и удобству в приложениях по сравнению с условиями В.Ф. Кротова и их известными модификациями (например, [5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R.* Nonsmooth Analysis and Control Theory. Springer-Verlag, N. Y., Grad. Texts in Math. 1998. V. 178.

2. *Хрусталев М.М.* Точное описание множеств достижимости и условие глобальной оптимальности динамических систем. I. Оценки и точное описание множеств достижимости и управляемости // Автоматика и телемеханика. 1988. № 5. С. 62–71.

3. *Дыхта В.А.* Неравенство Ляпунова-Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении // Итоги науки и техники. Совр. математика и ее приложения. 2006. Т. 110. С. 76–108.

4. *Аргучинцев А.В., Дыхта В.А., Срочко В.А.* Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума // Известия вузов. Математика. 2009. № 1. С. 3–43.

5. *Clarke F.H., Nour C.* Nonconvex Duality in Optimal Control // SIAM J. Control and Optimization. 2005. V. 43, № 6. P. 2036–2048.

Abstract: the report is devoted to estimating of reachable sets for control dynamic systems and to obtaining necessary and sufficient optimality conditions for optimal control problems; the estimations and the optimality conditions are based on using of a set of Lyapunov type functions, i.e., solutions to Hamilton-Jacobi inequalities.

Keywords: Lyapunov type functions; Hamilton-Jacobi inequalities; reachable set; optimality conditions.

Сорокин Степан Павлович
аспирант
Институт динамики систем
и теории управления
Сибирского отделения РАН
Россия, Иркутск
e-mail: sorsp@mail.ru

Stepan Sorokin
post-graduate student
Institute of System Dynamics
and Control Theory of
Siberian Department of RAS
Russia, Irkutsk
e-mail: sorsp@mail.ru

УДК 519.85

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ФУЖЕРА [1]

© М. В. Старов

Ключевые слова: базисы Гребнера; метод Фужера; модулярные методы.

Аннотация: Строится алгоритм вычисления базиса Гребнера методом Фужера F4; этот алгоритм реализован модулярно с применением метода CRT (Китайской теоремы об остатках).

[1]Работа выполнена при поддержке программы "Развитие потенциала высшей школы" (проект 2.1.1/1853).