ISSN 1810-0198. Вестник ТГУ, т.14, вып.1, 2009

СИМВОЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ КОМПОЗИЦИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

© С.М. Тарарова

Ключевые слова: символьное интегрирование, алгоритм Риша, теорема Лиувилля об элементарном интеграле.

Аннотация

Статья посвящена программной реализации алгоритма символьного интегрирования Риша. Приведен алгоритм символьного интегрирования,выделены основные процедуры алгоритма, и приведены результаты вычислительных экспериментов.

Вычисление интегралов представляет собой важную часть компьютерной алгебры. Алгоритм интегрирования в конечном виде функций из трансцендентного расширения поля рациональных функций, порожденного экспонентами и логарифмами, был сформулирован в 1969 году Ришем [1].

Алгоритм состоит из следующих этапов.

1. Проверка, принадлежит ли подынтегральная функция данному классу. Проверка осуществляется с помощью структурной теоремы [2].

Для формулировки структурной теоремы введем некоторые новые понятия.

Определение 1.1. *Элемент θ назовем регулярным мономом над дифференциальным полем F, если θ трансцедентен над F и является либо логарифмом, либо экспонентой над F. Последовательность элементов $\theta_1, \dots, \theta_n$ называется последовательностью регулярных мономов над $K(x, \theta_1, \dots, \theta_{k-1})$, $i = 1, \dots, n$.*

Теорема 1. *Пусть K - поле констант, $\theta_1, \dots, \theta_{k-1}$, $k \geq 1$ - последовательность регулярных мономов, E - множество индексов $1 \leq i \leq k-1$ таких, что θ_i является экспонентой $\theta_i = \exp(f_i)$, а L - множество индексов $1 \leq i \leq k-1$ таких, что θ_i является логарифмом $\theta_i = \ln(f_i)$.*

(1) Пусть $\theta_k = \exp(f_k)$ - экспонента над $F_{k-1} = K\{x, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}\}, f_k \in F_{k-1}$. Если элемент θ_k алгебраичен над F_{k-1}, то f_k представляется в виде линейной комбинации с рациональными коэффициентами

$$f_k = c + \sum_{i \in E} n_i f_i + \sum_{j \in L} m_j \theta_j, \qquad n_i, m_j \in Q,$$

где c - некоторая константа.

(2) Пусть $\theta_k = \ln(f_k)$ - логарифм над $F_{k-1} = K\{x, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}\}, f_k \in F_{k-1}$. Если элемент θ_k алгебраичен над F_{k-1}, то f_k представляется в виде произведения рациональных степеней

$$f_k = c \prod_{i \in E} \theta_i^{n_i} \times \prod_{j \in L} f_j^{m_j}, \qquad n_i, m_j \in Q,$$

где c - некоторая константа.

1.1. Освобождаемся от знаменателя и приравниваем коэффициенты при одинаковых мономах левой и правой частях. Но в первом случае нужно предварительно прологарифмировать обе части, представив логарифм от произведения в виде суммы логарифмов, при этом степени n_i, m_j превратятся в коэффициенты при одинаковых мономах. В результате получим систему линейных уравнений относительно c, n_i, m_j.

1.2. Если полученная на этапе 1.1 система не имеет решение в поле констант, такое, что все $n_i, m_j \in Q$, то θ_i не является регулярным мономом, в противном случае проверяем, единственным ли образом θ_k выражается через θ_i. Если "да", то θ_i не является регулярным мономом, иначе структурная теорема может только подсказать, как переформулировать исходную задачу.

2. С помощью теоремы Лиувилля [3] определяется вид элементарного интеграла, при условии его существования.

Теорема 2 (принцип Лиувилля). *Пусть f - функция из некоторого функционального поля K. Если f обладает элементарным над K интегралом, то этот интеграл имеет следующий вид:*

$$\int f = v_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \log(v_i),$$

где v_0 принадлежит полю K, v_i принадлежит расширению $\hat{K}$ поля K с помощью конечного числа алгебраических над K констант, а c_i - константы, принадлежащие $\hat{K}$.

3. Разложение подынтегрального выражения в сумму полинома и правильной рациональной дроби [3].

Если θ_n – логарифмическая функция, то разложить подынтегральное выражение в сумму полинома от θ_n и правильной рациональной дроби:

$$f = p + \frac{q}{r} = \left[\hat{p} + \frac{\hat{q}}{\hat{r}}\right]' + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i v_i}{v_i} = \underbrace{\hat{p}' + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{c_i v_i'}{v_i}}_{\text{полином}} + \underbrace{\left(\frac{\hat{q}}{\hat{r}}\right)' + \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i v_i'}{v_i}}_{\text{правильная рациональная функция}},$$

где $v_1, \ldots, v_k$ - нормированные полиномы от θ, $v_{k+1}, \ldots, v_n$ принадлежат полю K.

Если θ_n – экспоненциальная функция, то разлагаем подынтегральное выражение в сумму обобщенного полинома и правильной рациональной функции, знаменатель которой не делится на θ_n:

$$f = p + \frac{q}{r} = \left[\hat{p} + \frac{\hat{q}}{\hat{r}}\right]' + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i v_i}{v_i} = \underbrace{\hat{p}' + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{c_i v_i'}{v_i} + \eta' \sum_{i=1}^{k} c_i n_i +}_{\text{обобщенный полином}}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{\hat{q}}{\hat{r}}\right)' + \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i(v_i' - n_i \eta' v_i)}{v_i}}_{\text{правильная рациональная функция}},$$

где n_i - степень полинома, $\theta' = \eta'\theta$.

4. Вычисляем интеграл или приводим доказательство его отсутствия. Вычисление интеграла или доказательство его отсутствия производится методом неопределенных коэффициентов с использованием рекурсии.

Для интегрирования логарифмической функции будем рассматривать функциональные поля, порожденные логарифмом.
- K – функциональное поле, предполагаемое эффективным, такое, что мы можем интегрировать в K;
- θ – логарифм над K, $\theta' = \frac{\eta'}{\eta}$ и θ предполагается трансцендентным над K;
- поле $K(\theta)$ имеет то же поле констант, что и поле K.

Для интегрирования экспоненциальной функции будем рассматривать функциональные поля, порожденные экспонентой.
- K – функциональное поле, предполагаемое эффективным, такое, что мы можем интегрировать в K и умеем решать в K дифференциальное уравнение $y' + fy = g$;
- θ – экспонента над K, $\theta' = \eta'\theta$ и θ предполагается трансцендентным над K;
- поле $K(\theta)$ имеет то же поле констант, что и поле K.

Основной алгоритм метода неопределенных коэффициентов.

Представим полиномиальную (обобщенную полиномиальную) часть интеграла в виде [3]:

$$p = \sum_{i=0}^{m} A_i \theta^i, n = m + 1;$$

$$\sum_{i=0}^{m} A_i \theta^i = \left(\sum_{i=0}^{n} B_i \theta^i\right)' + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{c_i v_i'}{v_i} = \sum_{i=0}^{n} B_i' \theta^i + \sum_{i=1}^{n} i B_i \theta' \theta^{i-1} + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{c_i v_i'}{v_i}';$$

$$B_{m+1}' = 0;$$

$$B_m = \int A_m - (m+1)B_{m+1}\theta' = -(m+1)B_{m+1}\theta + \int A_m;$$

$$B_{m-1} = -mb_m\theta + \int A_{m-1} - mB_m\theta';$$

$$B_0 + \sum_{i=k+1}^{n} c_i \ln v_i = -b_1\theta + \int A_0 - B_1\theta'.$$

Предположим, что полином q записан в виде $\sum_{i=0}^{m} A_{1i}\theta^i$. Тогда дробно-рациональную часть можно представить в виде :

$$\frac{\sum_{i=0}^{m} A_{1i}\theta^i}{r^n} = \frac{d}{dx}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{B_{1i}}{r^{n-i}} + c_i \ln r\right],$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{m} A_{1i}\theta^i}{r^n} = \sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{-B_{1i}(r^{n-i})'}{r^{n-i+1}} + \frac{B'_{1i}}{r^{n-i}} + \frac{c_i(r^{n-i})'}{r^{n-i}}\right], \tag{1}$$

где коэффициенты B_{1i} $(i \in 1, \dots, n-1)$ находятся с помощью расширенного алгоритма Евклида [4]. Т. е. находим такие $P(\theta)$, $Q(\theta)$, где P - линейный относительно θ полином, $P(\theta), Q(\theta) \in Kx, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$, что:

$$-B_{1i}r' \equiv q \pmod{r}.$$

Подставляем значения B_{1i} в равенство (1) и приравниваем коэффициенты при одинаковых мономах левой и правой частей интеграла.

На основе выше приведенного алгоритма была разработана программа в среде программирования Java, для вычисления интеграла от функции, содержащей полиномиальное выражение. Исходная функция преобразуется в матричный вид, что позволяет выполнять различные операции с ней.

Основные процедуры программного кода.

Основная процедура *integrate* выполняет интегрирование композиций элементарных функций. На выходе процедуры *integrate* получим результат интегрирования. Она использует следующие процедуры.

- Процедура *razbienie* выполняет выделение в подынтегральном выражении последовательности подвыражений.

-Процедуры *EsliEXP*(для exp()) и *EsliLN* (для ln()) проверяют, является ли выбранная последовательность последовательностью регулярных мономов.

- Процедура *FunctionRAddArg* представляет исходную функцию в виде массива, где строки массива хранят в себе элементарные функции и их аргументы.

- Процедура *Solve* решает систему линейных уравнений относительно коэффициентов при одинаковых мономах (c, n_i, m_j) методом Гауса. На выходе получаем решения системы линейных уравнений ($int[]x$).

- Процедура *Verify* проверяет, является ли система совместной. На вход подаются корни системы линейных уравнений ($int[]x$) и некоторая заданная точность (*double eps*). На выходе получаем *true* или *false*.

- Если система линейных уравнений несовместна, то вместо c, n_i, m_j с помощью процедуры *EsliVerify* подставляем их значения и проверяем единственным ли образом θ_k выражается через θ_i. Если "нет", то данная процедура возвращает переформулированную исходную функцию.

- Процедура *Diff* находит производную от θ_i.

- Метод неопределенных коэффициентов в зависимости от того, относительно какой переменной происходит интегрирование (exp() или ln()), осуществляется в процедуре *InPatsMeniExp* или *InPatsMeniLn*. Данные процедуры возвращают массив B_i.

- Процедура *ItogSum* подставляет вместо B_i и θ_i их значения в формуле:

$$p = \sum_{i=0}^{m} B_i\theta^i.$$

Перечисленные выше процедуры программы реализованы. Приведем пример вычисления интеграла.

функции: $f = \ln(x \exp x^2)^2$.

Построим последовательность расширений полей, которая начинается с поля рациональных чисел Q.

Пусть $a_{01} = x^2$, $a_{02} = \exp(a_{01})$, $a_{03} = xa_{02}$, $a_{04} = \ln(a_{03})$, $a_{05} = a_{04}^2$.

Нужно проверить, является ли выписанная последовательность последовательностью регулярных мономов над $Q(x) = Q(a_{01})$.

$$a_{02} = \exp(a_{01}),\ R = R[c, x],\ pol = x^2c.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых мономах. Получили массив коэффициентов

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Т.к. соответствующая система несовместна, то a_{02} является регулярным мономом над $Q(a_{01}, a_{02})$.

$$a_{04} = \ln(a_{03}),\ R = R[c, m_0, x, a_{02}],\ pol = -m_0a_{02} + a_{02} + xc$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых мономах. Получили массив коэффициентов

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как соответствующая система несовместна, то a_{04} является регулярным мономом над $Q(a_{01}, a_{02}, a_{03})$.

В поле $Q(x, a_{01}, a_{02}, a_{03})$ исходное выражение имеет вид a_{04}^2.

Производная от a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{04}:
$a'_{01} = (2.0x)$,
$a'_{02} = ((2.0x)) * a_{02}$,
$a'_{03} = (((2.0x)) * a_{02}) * (x) + a_{02} * (1)$,
$a'_{04} = (((((2.0x)) * a_{02}) * (x) + a_{02} * (1)))/(a_{02} * x)$.
Метод неопределенных коэффициентов
$B[2] = (x)$,
$B[1] = -(x)^2 - 2 * (x)$,
$B[0] = ((x)^3)/(3) + (3 * x^2)/(2) + 2 * (x)$,
$\int f = (x^3/3 + 3 * x^2/2 + 2 * x) + \ln(x\exp(x^2))(-(x)^2 - 2 * x) + \ln(x\exp(x^2))^2x$.

Написаны программы для метода неопределенных коэффициентов для полиномиальной части интеграла, которая содержит композицию элементарных функций, exp() и ln(). В дальнейшем планируется расширить программный комплекс на дробно-рациональные выражения комплексную область,а также распараллелить программу для проведения вычислений на кластере ТГУ и МСЦ.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ (проект 08-07-97507) и программы "Развитие потенциала высшей школы"(проект 2.1.1/1853).

Список литературы

1. *Risch R.H.* The problem of integration in finite terms // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 139. P. 167-189.

2. *Панкратьев Е.В.* Элементы компьютерной алгебры (Конспекты спецкурса). М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007.

3. *Дэвенпорт Д., Сирэ И., Турнье Э.* Компьютерная алгебра. М.: Мир,1991.

4. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. М.: Мир, 1976. Т. 1.

Поступила в редакцию 20 ноября 2008 г.