О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРЕДПИСАННОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ [1]

© **Т. Б. Токманцев**

Рассмотрим задачу оптимального управления системой:

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n = \mathrm{cl}\,\Pi_T,$$

где время $t \in [0, T]$, фазовый вектор $x \in R^n$, управляющий параметр u выбирается из компакта $P \subset R^m$. Функционал платы имеет вид

$$I_{t_0, x_0}(x(\cdot), u(\cdot)) = \min_{\theta \in [t_0, T]} \left\{ \sigma\Big(\theta,\, x\big(\theta; t_0, x_0, u(\cdot)\big)\Big) + \int\limits_{t_0}^{\theta} g\big(t, x(t), u(t)\big) dt \right\}.$$

Оптимальный результат (цена) $V(t_0, x_0)$ определяется равенством

$$V(t_0, x_0) = \inf_{u(\cdot) \in U_{t_0, T}} I_{t_0, x_0}\Big(x\big(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)\big), u(\cdot)\Big).$$

Символом $U_{t_0,T}$ обозначается множество допустимых управлений $u(\cdot)\colon [t_0, T] \mapsto P$ — измеримых функций. Решение задачи ищется в виде оптимального синтеза $(t, x) \mapsto u^0(t, x) \in P$, то есть обратной связи, удовлетворяющей соотношениям (см. [1])

$$\begin{gathered}
\forall (t_0, x_0) \in \mathrm{cl}\,\Pi_T, \quad \forall x_\Delta(\cdot) = x_\Delta\big(\cdot, t_0, x_0, u^0(t, x)\big) \colon [t_0, T] \mapsto \mathbb{R}^n \colon \\
x_\Delta(\tau) = x_\Delta(t_i) + f\big(t_i, x_\Delta(t_i), u^0_\Delta(\tau)\big)[\tau - t_i], \quad u^0_\Delta(\tau) \equiv u^0\big(t_i, x_\Delta(t_i)\big), \quad \forall \tau \in [t_i, t_{i+1}), \\
t_i \in \Delta = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}, \quad x_\Delta(t_0) = x_0, \\
\lim_{\mathrm{diam}(D) \to 0} I_{t_0, x_0}\big(x_\Delta(\cdot), u^0_\Delta(\cdot)\big) = V(t_0, x_0).
\end{gathered}$$

Предполагается, что функции $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$ определены и непрерывны на $\mathrm{cl}\,\Pi_T \times P$, липшицевы по t, x с константой $L_1 > 0$. Для функций $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$ выполнены условия продолжимости с константой $K_1 > 0$. Функция $\sigma(t, x)$ определена и непрерывна на $\mathrm{cl}\,\Pi_T$, супердифференцируема по t, x, липшицева по t, x с константой $L_2 > 0$. Множество $\mathrm{Arg} \min\limits_{(f,g) \in E(t,x)} [\langle p, f\rangle + g] = \big\{\big(f^0(t, x, p), g^0(t, x, p)\big)\big\}$ — одноэлементное, где $E(t, x) = \Big\{\big(f(t, x, u), g(t, x, u)\big) \colon u \in P\Big\}$.

Производится разбиение $\Delta = \{0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$ с шагом Δt. Строится равномерная сетка $Q_N = \{y^j \in D\}$, $j = (j_1, \ldots, j_n)$, с шагом Δy на прямоугольной области $D \subset \mathbb{R}^n$ в момент $t = t_N$. Символом Q_i обозначается сетка в момент $t = t_i$.

Аппроксимация функции цены строится по рекуррентной формуле (см. [3, 5])

$$\tilde{V}(t_N, \hat{x}^{j^0}_N) = \sigma(t_N, \hat{x}^{j^0}_N) = \hat{z}^{j^0}(t_N); \quad \tilde{V}(t_i, \hat{x}^{j^0}_i) = \min\big\{\sigma(t_i, \hat{x}^{j^0}_i), \min_{j\colon \|\hat{x}^j_i - \hat{x}^{j^0}_i\| \leqslant \rho} \hat{z}^j_i\big\} =$$

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05-01-00609) и гранта Президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ НШ–8512.2006.1.

$$\min_{j\colon \|\hat{x}_i^j - \hat{x}_i^{j^0}\| \leqslant \rho} \Big\{ \sigma(t_i, \hat{x}_i^{j^0}),\ \tilde{V}(t_{i+1}, \hat{x}_{i+1}^j) + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} g^0\big(\tau, \hat{x}^j(\tau), \hat{p}^j(\tau)\big) d\tau \Big\}, \quad i \in \overline{N-1, 0},$$

в обратном времени вдоль обобщенной характеристики $\big(\hat{x}^{j_0}(\cdot),\ \hat{p}^{j_0}(\cdot),\ \hat{z}^{j_0}(\cdot)\big) : [t_i, t_{i+1}] \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ (см. [2, 4]) в моменты времени $t = t_i$. Здесь $\rho > 0$ — параметр аппроксимации. Аппроксимация супердифференциала функции цены строится по формуле

$$\partial_y \tilde{V}(t_i, \hat{x}_i^{j_0}) = \mathrm{co}\big\{ \partial_y \tilde{\sigma}(t_i, \hat{x}_i^{j_0}), \bigcup \{ \hat{p}_i^j \colon \|\hat{x}_i^j - \hat{x}_i^{j_0}\| \leqslant \rho,\ \hat{z}_i^j = \tilde{V}(t_i, \hat{x}_i^{j_0}) \} \big\}.$$

Сеточной оптимальный синтез $u^0(t_i, y_i^j),\ y_i^j = \hat{x}_i^j$, определяется соотношениями:

$$u^0(t_i, y_i^j) \in \big\{ u : f(t_i, y_i^j, u) = f^0(t_i, y_i^j, p_i^j),\ g(t_i, y_i^j, u) = g^0(t_i, y_i^j, p_i^j),\ p_i^j \in \partial_y \tilde{V}(t_i, y_i^j) \big\}.$$

Управление $u_\Delta^0(t)$ строится по сеточной обратной связи $u^0(t_i, y_i^j)$:

$$u_\Delta^0(t) = u_* \in P, \qquad \text{при } t \in [t_0, t_{i_0}), \quad t_{i_0} = \min_{t_i \in \Gamma_N} (t_i \geqslant t_0),$$

$$y_{i_0} \in Q_{i_0} : \qquad \|y_{i_0} - x_\Delta^0\| = \min_{y^j \in Q_{i_0}} \|y^j - x_\Delta^0\|, \quad x_\Delta^0 = x_0 + f(t_0, x_0, u_*)(t_{i_0} - t_0),$$

$$x_\Delta^0(t) = x_\Delta^0(t_{i-1}) + f\big(t_{i-1}, y_{i-1}, u_\Delta^0(t)\big)(t - t_{i-1}), \quad t \in [t_{i-1}, t_i),\ i = \overline{i_0 + 1, N},$$

$$u_\Delta^0(t) = u^0(t_{i-1}, y_{i-1}), \quad \text{при } t \in [t_{i-1}, t_i),\ t_{i_0+1} \leqslant t_i \leqslant T,$$

$$y_i \in Q_i; \qquad y_i = y_{i-1} + f\big(t_{i-1}, y_{i-1}, u^0(t_{i-1}, y_{i-1})\big)(t_i - t_{i-1}), \quad i = \overline{i_0 + 1, N}.$$

Обозначим символом $\omega(\cdot)$ модуль непрерывности функций $f^0(t, x, \cdot),\ g^0(t, x, \cdot)$ по p и введем в рассмотрение множество $D_T = \exp(T) \cdot D \times [0, T]$. Оценка результата реализации сеточного синтеза $u^0(t_i, y_i^j)$ из точки $(t_0, x_0) \in D_T$ имеет вид

$$|V(t_0,\, x_0) - I_{t_0, x_0}\big(x_\Delta^0(\cdot), u_\Delta^0(\cdot)\big)| \leqslant E_1 \Delta t + E_2 \omega(F \Delta t) + E_3 \Delta y + 2C,$$

где $E_1 > 0,\ E_2 > 0,\ E_3 > 0$ — константы, вычисляемые по константам из предположений о входных данных задачи, $C = 10^{-7}$ — вычислительная погрешность, связанная с округлением машинных чисел при хранении текущих сеток Q_i на жестком диске.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
3. *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First Order of PDEs: The dynamical Optimization Perspectives. Boston: Birkhauser, 1995.
4. *Субботина Н.Н.* Метод характеристик для уравнений Гамильтона-Якоби и его приложения в динамической оптимизации // Современная математика и ее приложения, Дифференциальные уравнения, Тбилиси: Академия Наук Грузии, Институт Кибернетики, 2004. Т. 20.
5. *Субботина Н.Н., Токманцев Т.Б.* Алгоритм построения минимаксного решения уравнения Беллмана в задаче Коши с дополнительными ограничениями // Динамические системы: моделирование, оптимизация и управление: труды Института математики и механики УрО РАН. Т. 12, №1. С. 208–215. Екатеринбург: УрО РАН, 2006.

Токманцев Тимофей Борисович
Институт математики и механики
Россия, Екатеринбург
e-mail: Tokmantsev@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 5 мая 2007 г.