УДК 519

ОБ ОДНОЙ ПОЛЕЗНОЙ ОЦЕНКЕ ПУАССОНОВСКИХ СУММ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ РИСКА

© Г. А. Тырыгина

Ключевые слова: пуассоновская сумма; нормальная аппроксимация; оценка.

Аннотация: Применимые на практике оценки точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских сумм могут быть полезными в некоторых моделях риска.

При исследовании распределения остатка средств R страховой компании по страховому портфелю из N договоров можно получить, что

$$R = r + \sum_{i=1}^{N} Z_i - \sum_{i=1}^{N} Y_i,$$

где r – начальный капитал по страховому портфелю, Z_i – страховая премия, Y_i – величина выплат.

При этом N может быть как детерминированной, так и случайной величиной. Представляет интерес случай, когда N случайная величина. Пусть $N = N_\lambda$ – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ, $\lambda > 0$.

Формализация приведённой ситуации и некоторых других приводит к математическим моделям с пуассоновской суммой

$$S_\lambda = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_\lambda},$$

где $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределённые случайные величины. Причём случайные величины $N_\lambda, X_1, X_2, \ldots$ независимы при каждом λ.

Для расчёта требуемых вероятностных показателей в рамках математических моделей, связанных с той или иной схемой страхования, можно привлекать результаты, полученные в теории предельных теорем. В [2] доказана асимптотическая нормальность пуассоновских сумм:

$$P\left(\frac{S_\lambda - a\lambda}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x\right) \Rightarrow \Phi(x) \quad (\lambda \to \infty)$$

при условии существования MX_1^2.

Здесь $\Phi(x)$ – стандартное нормальное распределение,

$$MS_\lambda = \lambda a, \text{ где } a = MX_1$$
$$\sqrt{DS_\lambda} \equiv \sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}, \text{ где } \sigma^2 = DX_1.$$

При решении задач, связанных с большими рисками, приходится иметь дело с распределениями, для которых не существуют моменты третьего порядка, а существуют моменты порядка $2+\delta$, где $0 < \delta < 1$. Следовательно, представляет интерес случай, когда

$$MX_1 = a,\ DX_1 = \sigma^2,\ M|X_1|^{2+\delta} < \infty,\ 0 < \delta < 1.$$

Приведём практически применимые оценки точности нормальной аппроксимации для распределения пуассоновской суммы [1].

Если $MX_1 = a$, $DX_1 = \sigma^2$, $M|X_1|^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta < 1$, то

$$\sup_x \left| P\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2+\sigma^2)}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leqslant C(\delta) \cdot \frac{M|X_1|^{2+\delta}}{(a^2+\sigma^2)^{\frac{(2+\delta)}{2}} \cdot \lambda^{\frac{\delta}{2}}},$$

где

$$C(\delta) = \frac{2^{1-\frac{\delta}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{2+\delta}{2}\right)}{\pi(1+\delta)(2+\delta)}.$$

В [1] найдены числовые значения

δ	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
$C(\delta)$	0,2876	0,2592	0,2352	0,2141	0,1935	0,1791	0,1645

δ	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70
$C(\delta)$	0,1515	0,1399	0,1294	0,1201	0,1116	0,1040	0,0970

δ	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$C(\delta)$	0,0907	0,0850	0,0797	0,0750	0,0706	0,0665

ЛИТЕРАТУРА

1. *Королёв В.Ю., Шевцова И.Г.* О точности нормальной аппроксимации. II // Теория вероятностей и её применение. 2005. Т. 50. Вып. 3. С. 555-564.

2. *Королёв В.Ю.* Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами // Теория вероятностей и её применение. 1994. Т. 39. Вып. 2. С. 313-333.

Abstract: Normal approximation accurity estimaties poisson sums applied to practice might be beneficial in the risk models.

Keywords: Poisson sum; normal approximation; estimate.

Тырыгина Галина Алексеевна
к. ф.-м. н., доцент
Тольяттинский государственный университет
Россия, Тольятти
e-mail: Galex@tltsu.ru

Galina Tyryguina
candidate of phys.-math. sciences,
senior lecturer
Tolyatti State University
Russia, Tolyatti
e-mail: Galex@tltsu.ru