

УДК 517.98

О КОРРЕКТНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

© В. М. Тюрин

Ключевые слова: дифференциальный оператор; пространство Соболева; корректность.

Аннотация: Изучается в пространстве Соболева корректность линейных дифференциальных операторов.

Пусть X – гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$; $L^2 = L^2(R^n, X)$ – Лебегово пространство функций $u : R^n \rightarrow X$ ($n \geq 2$), при этом $\|\cdot\|_0$ – норма в L_2 ; $H^m = H^m(R^n, X)$ $m \in N$ – пространство Соболева функций $u : R^n \rightarrow X$, в котором норма $\|\cdot\|_m$ определяется обычным образом. Рассмотрим дифференциальный оператор $P : H^m \rightarrow L^2$ вида

$$Pu = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha D^\alpha u,$$

где $A_\alpha : R^n \rightarrow H_{0m}(X, X)$ – непрерывные ограниченные функции, причём старшие коэффициенты A_α ($|\alpha| = m$) постоянны.

Обозначим $P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha \xi^\alpha$. Оператор $P : H^m \rightarrow L^2$ назовём равномерно эллиптическим в R^n , если существует такая постоянная $\varkappa > 0$, что

$$\varkappa \|h\| \cdot |\xi|^m \leq \|P_m(\xi)h\|$$

для любых $\xi \in R^n$, $h \in X$ ($\xi \neq 0$).

Далее, предполагается, что оператор $P : H^m \rightarrow L^2$ равномерно эллиптивен.

Оператор $P : H^m \rightarrow L^2$ назовём корректным (В.В. Жиков), если существует постоянная $k > 0$ такая, что

$$\|u\|_m \leq k \|Pu\|_0$$

для всех $u \in H^m$. Если выполняется неравенство

$$\|u\|_0 \leq k_0 \|Pu\|_0,$$

то оператор $P : H^m \rightarrow L^2$ назовём 0-корректным.

Т е о р е м а. При сделанных предположениях относительно оператора $P : H^m \rightarrow L^2$ 0-корректность эквивалентна его корректности.

Приводятся приложения приведенной теоремы.

Abstract: The correctness property of linear differential operators in the Sobolev space is studying.

Keywords: differential operator; Sobolev space; correctness.

Тюрин Василий Михайлович
д. ф.-м. н., профессор
Липецкий государственный
технический университет
Россия, Липецк
e-mail: tuvmm@stu.lipetsk.ru

Vasilij Turin
doctor of phys.-math. sciences, professor
Lipetsk State
Technical University
Russia, Lipetsk
e-mail: tuvmm@stu.lipetsk.ru