

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. Красовский Н. Н. К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 5. С. 1260–1263.
3. Красовский Н. Н. Унификация дифференциальных игр // Игровые задачи управления: тр. Ин-та математики и механики. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. Т. 24. С. 32–45.
4. Тарасьев А. М., Ушаков В. Н. О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения–уклонения. М., 1983. Деп. в ВИНТИ 05.05.1983. № 2454-83.
5. Григорьева С. В., Пахотинских В. Ю., Успенский А. А. и др. Конструирование решений в некоторых дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // Матем. сб. 2005. Т. 196, № 4. С. 51–78.

Ушаков Владимир Николаевич
Институт математики и
механики УрО РАН
Россия, Екатеринбург
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Михалев Дмитрий Константинович
Уральский государственный
технический ун-т
Россия, Екатеринбург
e-mail: ddmk@r66.ru

Поступила в редакцию 5 мая 2007 г.

К ВОПРОСУ О СТАБИЛИЗАЦИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК, СОЕДИНЕННЫХ ЖЕСТКОЙ ТЯГОЙ

© И. В. Феклисов

Эта работа продолжает исследование динамики управляемой механической системы (рис. 1), начатое в [1, 2]. Здесь m_i — масса i -ой материальной точки, g — ускорение свободного падения, $r_i = (x_i, y_i)$ — координаты точки m_i в инерциальной системе координат, $w = (w_1, w_2)$ — вектор управляющих сил, $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ — возмущающая сила (помеха), приложенная к точке m_2 . Предполагается, что точки m_i жестко связаны тягой нулевой массы длины l , и колебания системы происходят в плоскости XOY .

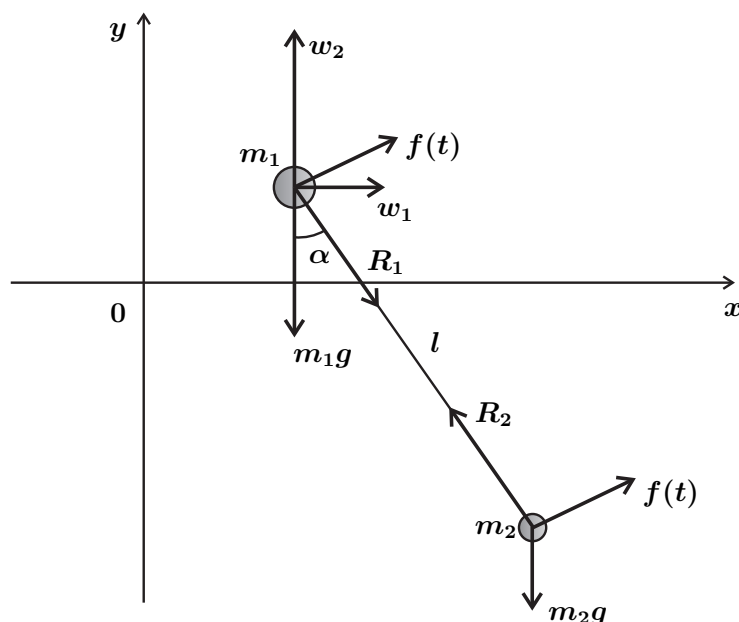


Рис. 1. Материальные точки, соединенные жесткой тягой

Рассматривается следующая **задача стабилизации**. Пусть задана траектория движения $t \rightarrow p(t) = (p_1(t), p_2(t))$ точки m_1 . Требуется с помощью выбора подходящего *неупреждающего позиционного* управления $w(t, \cdot)$ осуществить *локально устойчивое* движение точки m_1 по траектории, по возможности близкой к заданной, и при этом управление должно быть таким, чтобы угол $\alpha(t)$ отклонения груза мало отличался от некоторой константы (зависящей от помехи $f(t)$), близкой к нулю. Предполагается при этом, что в каждый момент времени t_0 нам известна величина помехи $f(t)$ только при $t \leq t_0$ и неизвестно поведение $f(t)$ при $t > t_0$.

Поскольку механическая системы имеет жесткую связь, то число степеней свободы равно трём. Это позволяет записать уравнения Лагранжа [3, Глава 3, § 1] в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \Phi_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $q_1 = x_1$, $q_2 = y_1$, $q_3 = \alpha$ — обобщенные силы, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$ — обобщенные скорости, $T = \frac{m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)}{2} + \frac{m_2}{2}(l^2\dot{\alpha}^2 + 2l\dot{\alpha}(\dot{x}_1 \cos \alpha + \dot{y}_1 \sin \alpha))$ — кинетическая энергия, $m = m_1 + m_2$, Φ_i — обобщенные силы. Поэтому уравнения (1) примут вид

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (m_2 l \cos \alpha)\ddot{\alpha} - m_2 l \dot{\alpha}^2 \sin \alpha &= \Phi_1, \\ m\ddot{y}_1 + (m_2 l \sin \alpha)\ddot{\alpha} + m_2 l \dot{\alpha}^2 \cos \alpha &= \Phi_2, \\ (m_2 l \cos \alpha)\ddot{x}_1 + (m_2 l \sin \alpha)\ddot{y}_1 + m_2 l^2 \ddot{\alpha} &= \Phi_3. \end{cases}$$

Если $(p_1(t), p_2(t))$ заданное движение точки (x_1, y_1) , то система уравнений в отклонениях $x \rightarrow x - p_1(t)$, $y \rightarrow y - p_2(t)$, $\alpha \rightarrow \alpha$, после перехода к безразмерным координатам ¹ и ряда

¹В качестве характерных масштабов выберем массу, длину и ускорение свободного падения g , а для t в качестве масштаба времени примем величину $t_* = \sqrt{l/g}$.

преобразований, запишется в виде

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1+m\cos^2\alpha}{1+m}u_1 + \frac{m\sin 2\alpha}{2(1+m)}u_2 - r_1(t)\cos^2\alpha - r_2(t)\sin\alpha\cos\alpha, \\ \ddot{y} = \frac{m\sin 2\alpha}{2(1+m)}u_1 + \frac{1+m\cos^2\alpha}{1+m}u_2 - r_1(t)\sin\alpha\cos\alpha - r_2(t)\sin^2\alpha, \\ \ddot{\alpha} = -(\cos\alpha)u_1 - (\sin\alpha)u_2 + \frac{1+m}{m}(r_1(t)\cos\alpha + r_2(t)\sin\alpha), \end{cases} \quad (2)$$

где $m = m_2/m_1$, $r_1(t) = f_1(t) - m\ddot{p}_1(t)$, $r_2(t) = f_2(t) - m(1 + \ddot{p}_2(t))$.

Из (2) следует, что если $u_1(t) \equiv u_2(t) \equiv 0$, то при $r_1(t) \equiv 0$ (и только в этом случае) система (2) имеет тривиальное решение (*идеальное* движение). Таким образом, при идеальном движении точка m_1 осуществляет заданное движение и при этом отсутствует «раскачивание» точки m_2 относительно m_1 . Если $p_1(t) = p_1 + vt$, $p_2(t) = p_2$ (горизонтальное движение с постоянной скоростью), $f_2(t) \equiv 0$, $f_1(t) = \text{const}$, то задача стабилизации упрощается. Доклад посвящён построению неупреждающего позиционного управления, решающего задачу стабилизации в описанном случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаев С. Ф., Тонков Е. Л., Феклистов И. В. Колебания двух материальных точек, соединённых жёсткой тягой // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2006. Вып. 2(36). С. 201–204.
2. Николаев С. Ф., Тонков Е. Л., Феклистов И. В. Стабилизация механической системы, состоящей из двух материальных точек, соединённых жёсткой тягой нулевой массы // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2006. Вып. 3(37). С. 113–114.
3. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2001. 320 с.

Феклистов Игорь Вячеславович
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Москва
e-mail: artclimate@rambler.ru

Поступила в редакцию 10 мая 2007 г.

О ПРОИЗВОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРНОГО АРГУМЕНТА

© В. И. Фомин

Пусть E — банахово пространство; $L(E)$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E . Рассмотрим действительную операторную функцию $f : D(f) \subseteq L(E) \rightarrow L(E)$ действительного операторного аргумента Λ (действительные