УДК 517.911, 517.968

ОЦЕНКА А.Ф. ФИЛИППОВА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ [1]

© О. В. Филиппова

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; импульсные воздействия; оценка А.Ф. Филиппова.

Аннотация: Для функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями получена оценка решения относительно наперед заданной кусочно-непрерывной функции, аналогичная оценке А.Ф. Филиппова для обыкновенных дифференциальных включений. Отметим, что дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями исследованы в монографиях [1 – 3].

Пусть $\mathcal{U} \in [a,b]$ – измеримое по Лебегу множество. Обозначим $\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})$ пространство суммируемых по Лебегу функций $x : U \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L_1^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|ds.$

Множество всех ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}_1^n[a,b]$ обозначим через $S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$.

Пусть $t_k \in [a,b]$ $(a < t_1 < \ldots < t_m < b)$ – конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_m,b]$ ограниченных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k = 1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \Phi(x), \tag{1}$$

$$\Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k)),\ k = 1,2,\ldots,m, \tag{2}$$

$$x(a) = x_0, \tag{3}$$

где отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $U \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией. Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,...,m$, непрерывны и удовлетворяют условию Липшица: для каждого $k = 1,2,...,m$ найдется такое число g_k, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется оценка

$$|I_k(x) - I_k(y)| \leqslant g_k|x-y|; \tag{4}$$

$\Delta(x(t_k)) = x(t_k+0) - x(t_k)$, $k = 1,2,...,m$.

Будем говорить, что отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойством* $\mathcal{A}$, если найдется такая суммируемая функция $l : [a,b] \to [0,\infty)$, что для любых функций $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ и любого $t \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$h_{\mathbf{L}_1^n[a,t]}[\Phi(x);\Phi(y)] \leqslant \int\limits_a^t l(s)ds \sup_{s\in[a,t]} |x(s)-y(s)|. \tag{5}$$

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (№ 07-01-00305, 09-01-97503), научной программой "Развитие научного потенциала высшей школы"(РНП № 2.1.1/1131), и включена в Темплан № 1.6.07.

Если отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ удовлетворяет для любого измеримого множества $\mathcal{U} \in [a,b]$ оценке

$$h_{\mathbf{L}_1^n[a,t]}[\Phi(x);\Phi(y)] \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} l(s)ds\|x-y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}, \tag{6}$$

то будем говорить, что оно *обладает свойством* $\mathcal{B}$.

О п р е д е л е н и е 1. *Под решением задачи* (1)-(3) будем понимать функцию $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такое $q \in \Phi(x)$, что при всех $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{7}$$

где $\Delta(x(t_k))$, $k = 1,2,...,m$, удовлетворяют равенствам (2), $\chi_{(c,d]}(\cdot)$ – характеристическая функция полуинтервала $(c,d]$.

Далее предположим, что оператор $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ (правая часть включения (1)) вольтерров по А.Н. Тихонову.

Пусть для функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ существует функция $\widetilde{q} \in \mathbf{L}^n[a,b]$, что для любого $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$y(t) = y(a) + \int\limits_a^t \widetilde{q}(s)ds + \sum_{k=1}^m \chi_{[t_k,b]}(t)\Delta(y(t_k)), \tag{8}$$

где $\Delta(y(t_k))$, $k = 1,2,...,m$, удовлетворяет равенству (2). Пусть для функции $\varkappa \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$ для каждого измеримого множества $\mathcal{U}$ справедливо соотношение

$$\rho_{\mathbf{L}_1^n(\mathcal{U})}[\widetilde{q};\Phi(y)] \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} \varkappa(s)ds, \tag{9}$$

где функции $\widetilde{q} \in \mathbf{L}_1^n[a,b]$ и $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ удовлетворяют равенству (8).

Т е о р е м а. *Пусть для функции* $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ *имеет место представление* (8), *а функция* $\varkappa \in \mathbf{L}_+^1[a,b]$ *для каждого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *удовлетворяет неравенству* (9). *Тогда, если отображение* $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойством* $\mathcal{A}$, *то существует такое решение* $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ *задачи* (1)-(3), *что для любого* $t \in [a,b]$ *имеет место оценка*

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \xi(\varkappa,p)(t); \tag{10}$$

если же отображение $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to S(\mathbf{L}_1^n[a,b])$ *обладает свойствами* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$, *то существует такое решение* $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ *задачи* (1)-(3), *которое для любого* $t \in [a,b]$ *удовлетворяет оценке* (10), *и при почти всех* $t \in [a,b]$ *справедливо соотношение*

$$|q(t) - \widetilde{q}(t)| \leqslant \varkappa(t) + l(t)\xi(\varkappa,p)(t), \tag{11}$$

где $p = |x_0 - y(a)|$, *функция* $l : [a,b] \to [0,\infty)$ *удовлетворяет оценкам* (5), (6), *а функция* $\xi(\varkappa,p)(t)$ *имеет вид*

$$
\begin{aligned}
\xi(\varkappa,p)(t) \;=\; &\int\limits_a^t \varkappa(s)e^{\int\limits_s^t l(\tau)d\tau} ds + p\, e^{\int\limits_a^t l(s)ds} + \\
+ \sum_{k=1}^{m} g_k &\left(\int\limits_a^{t_k} \varkappa(s)e^{\int\limits_s^{t_k} l(\tau)d\tau} ds + p\, e^{\int\limits_a^{t_k} l(s)ds} \right) e^{\int\limits_{t_k}^{t} l(s)ds} \chi_{(t_k,b]}(t) + \\
+ \sum_{k=1}^{m-1} g_1 g_{k+1} &\left(\int\limits_a^{t_1} \varkappa(s)e^{\int\limits_s^{t_1} l(\tau)d\tau} ds + p\, e^{\int\limits_a^{t_1} l(s)ds} \right) e^{\int\limits_{t_1}^{t} l(s)ds} \chi_{(t_{k+1},b]}(t) + \\
+ \sum_{k=2}^{m-2} g_2 g_{k+1} &\left(\int\limits_a^{t_2} \varkappa(s)e^{\int\limits_s^{t_2} l(\tau)d\tau} ds + p\, e^{\int\limits_a^{t_2} l(s)ds} \right) e^{\int\limits_{t_2}^{t} l(s)ds} \chi_{(t_{k+1},b]}(t) + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ g_{m-1} g_m &\left(\int\limits_a^{t_{m-1}} \varkappa(s)e^{\int\limits_s^{t_{m-1}} l(\tau)d\tau} ds + p\, e^{\int\limits_a^{t_{m-1}} l(s)ds} \right) e^{\int\limits_{t_{m-1}}^{t} l(s)ds} \chi_{(t_m,b]}(t) + \\
+ \sum_{k=1}^{m-2} g_1 g_2 g_{k+2} &\left(\int\limits_a^{t_1} \varkappa(s)e^{\int\limits_s^{t_1} l(\tau)d\tau} ds + p\, e^{\int\limits_a^{t_1} l(s)ds} \right) e^{\int\limits_{t_1}^{t} l(s)ds} \chi_{(t_{k+2},b]}(t) + \\
+ \sum_{k=1}^{m-3} g_2 g_3 g_{k+3} &\left(\int\limits_a^{t_2} \varkappa(s)e^{\int\limits_s^{t_2} l(\tau)d\tau} ds + p\, e^{\int\limits_a^{t_2} l(s)ds} \right) e^{\int\limits_{t_2}^{t} l(s)ds} \chi_{(t_{k+3},b]}(t) + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ g_{m-2} g_{m-1} g_m &\left(\int\limits_a^{t_{m-2}} \varkappa(s)e^{\int\limits_s^{t_{m-2}} l(\tau)d\tau} ds + p\, e^{\int\limits_a^{t_{m-2}} l(s)ds} \right) e^{\int\limits_{t_{m-2}}^{t} l(s)ds} \chi_{(t_m,b]}(t) + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ g_1 g_2 \ldots g_m &\left(\int\limits_a^{t_1} \varkappa(s)e^{\int\limits_s^{t_1} l(\tau)d\tau} ds + p\, e^{\int\limits_a^{t_1} l(s)ds} \right) e^{\int\limits_{t_1}^{t} l(s)ds} \chi_{(t_m,b]}(t).
\end{aligned}
$$

Здесь числа g_k, $k = 1, 2, ..., m$, *удовлетворяют неравенству* (4).

Отметим, что если импульсные воздействия отсутствуют, то приведенные оценки (10), (11) совпадают с оценкой А.Ф. Филиппова для обыкновенных дифференциальных включений (см. [4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. К.: Вища шк., 1987.

2. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.

3. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1987.

4. *Филиппов А. Ф.* Диференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

Abstract: For a functional-differential inclusion with impulses there is derived the solution estimate with respect to a given piecewise continuous function. The estimate is analogous to that one of A.F. Filippov for ordinary differential inclusions. Note that differential equations with impulses were studied in monographs [1–3].

Keywords: functional-differential inclusion; impulses; A.F. Filippov's estimate.

Филиппова Ольга Викторовна
аспирант
Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: philippova.olga@rambler.ru

Olga Filippova
post-graduate student
Tambov State University named after G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: philippova.olga@rambler.ru

УДК 517.911.5

НЕЯВНЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ И НЕПРЕРЫВНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ [1]

© **И. А. Финогенко**

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с разрывной правой частью; правостороннее условие Липшица; скользящий режим; аппроксимация Иосиды; запаздывание.

Аннотация: Исследуется метод представления дифференциальных уравнений с разрывной правой частью в неявной форме. Метод согласуется с известными подходами, такими как простейшее выпуклое доопределение в смысле Филиппова, метод эквивалентного управления. В рамках условий типа монотонности неявный метод позволяет получать однозначно определенные уравнения движения разрывных систем, в частности — уравнения скользящих режимов. Рассматриваются непрерывные аппроксимации Иосиды разрывных систем и оценки для точных и аппроксимирующих решений. Эти же вопросы изучаются для дифференциально-разностных разрывных систем.

Исследуются системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ и, как обычно, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ — вектор производных $\dot{x}_i = dx_i/dt$. Предполагается, что функция f кусочно непрерывна по совокупности переменных (t, x) в некоторой области Ω из пространства R^{n+1} и ее множества точек разрыва определяются в виде гладких гиперповерхностей $M_i = \{(t, x) \in \Omega : \phi_i(x) = 0\}$, $(i = 1, \dots, m)$. В каждой точке x градиенты $\nabla\phi_j(x)$ функций $\phi_j(x)$ с индексами из множества $I(x) = \{i \in (1, \dots, m) : \phi_i(x) = 0\}$ линейно независимы. Под решением уравнения (1) понимается решение (в смысле А.Ф. Филиппова [1]) дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{2}$$

где $F(t, x)$ — выпуклая оболочка всех предельных значений функции $f(t, x)$ в каждой точке (t, x).

Через $U_\delta(x_0) = \{x : \|x - x_0\| < \delta\}$ обозначается δ-окрестность точки x_0. Уравнение (1) исследуется в рамках следующего условия:

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (интеграционные проекты № 85 и № 107)