ISSN 1810-0198. Вестник ТГУ, т. 14, вып. 4, 2009

Филиппова Ольга Викторовна
аспирант
Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: philippova.olga@rambler.ru

Olga Filippova
post-graduate student
Tambov State University named after G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: philippova.olga@rambler.ru

УДК 517.911.5

НЕЯВНЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ И НЕПРЕРЫВНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ [1]

© И. А. Финогенко

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с разрывной правой частью; правостороннее условие Липшица; скользящий режим; аппроксимация Иосиды; запаздывание.

Аннотация: Исследуется метод представления дифференциальных уравнений с разрывной правой частью в неявной форме. Метод согласуется с известными подходами, такими как простейшее выпуклое доопределение в смысле Филиппова, метод эквивалентного управления. В рамках условий типа монотонности неявный метод позволяет получать однозначно определенные уравнения движения разрывных систем, в частности — уравнения скользящих режимов. Рассматриваются непрерывные аппроксимации Иосиды разрывных систем и оценки для точных и аппроксимирующих решений. Эти же вопросы изучаются для дифференциально-разностных разрывных систем.

Исследуются системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ и, как обычно, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ — вектор производных $\dot{x}_i = dx_i/dt$. Предполагается, что функция f кусочно непрерывна по совокупности переменных (t, x) в некоторой области Ω из пространства R^{n+1} и ее множества точек разрыва определяются в виде гладких гиперповерхностей $M_i = \{(t, x) \in \Omega : \phi_i(x) = 0\}$, $(i = 1, \ldots, m)$. В каждой точке x градиенты $\nabla\phi_j(x)$ функций $\phi_j(x)$ с индексами из множества $I(x) = \{i \in (1, \ldots, m) : \phi_i(x) = 0\}$ линейно независимы. Под решением уравнения (1) понимается решение (в смысле А.Ф. Филиппова [1]) дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{2}$$

где $F(t, x)$ — выпуклая оболочка всех предельных значений функции $f(t, x)$ в каждой точке (t, x).

Через $U_\delta(x_0) = \{x : \|x - x_0\| < \delta\}$ обозначается δ-окрестность точки x_0. Уравнение (1) исследуется в рамках следующего условия:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (интеграционные проекты № 85 и № 107)

У с л о в и е А. Для каждой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ существуют числа $\delta = \delta(t_0, x_0) > 0$ и $l = l(t_0, x_0) > 0$ такие, что для любых точек (t, x), (t, y) из областей непрерывности функции $f(t, x)$ (возможно разных областей для различных точек (t, x), (t, y)), удовлетворяющих $x, y \in U_\delta(x_0)$, и любого $t \in [t_0, t_0 + \delta)$, выполняется неравенство

$$\langle A(t, x)(x - y), f(t, x) - f(t, y)\rangle \leqslant l\|x - y\|^2, \tag{3}$$

где $A(t, x) = [a_{ij}(t, x)]_{i,j=1}^n$ — некоторая симметричная положительно определенная и непрерывно дифференцируемая матрица, $\langle \cdot, \cdot\rangle$ — знак скалярного произведения и $\| \cdot \|$ — евклидова норма.

Если $A(t, x) = E$ — единичная матрица, то условие А переходит в хорошо известное правостороннее условия Липшица (см. [1, стр. 82]). Если к тому же $l = 0$, то неравенство (3) называется условием монотонности. Использование в неравенстве (3) матрицы $A(t, x)$ может быть полезно при изучении уравнений вида

$$A(t, x)\dot{x} = f_0(t, x) + g(t, x)$$

с симметричной, положительно определенной матрицей $A(t, x)$ при производных, что характерно, например, для уравнений Лагранжа второго рода при описании движения механических систем с разрывными диссипативными характеристиками (релейными управлениями или кулоновыми силами трения).

Для каждой точки (t, x) разрыва функции $f(t, x)$ и произвольного вектора $z \in R^n$ такого, что $\langle \nabla\phi_i(x), z\rangle \neq 0$ через $\tilde{f}(t, x; z)$ обозначим предел функции $f(t, x + hz)$ при $h \to +0$. Определим множество $\tilde{F}(t, x; z)$, как выпуклую оболочку предельных значений отображения $z' \to \tilde{f}(t, x; z')$ при $z' \to z$. Легко видеть, что $\tilde{F}(t, x; z) \subset F(t, x)$ и $\tilde{F}(t, x; 0) = F(t, x)$.

У т в е р ж д е н и е 1. *Пусть выполняется условие А. Тогда:*

1. При любых $(t, x) \in \Omega$ существует единственное решение $z(t, x)$ включения

$$z \in \tilde{\Gamma}(t, x; z)$$

и положительно определенная квадратичная форма $v(z) = zA(t, x)z^T$ при $z = z(t, x)$ достигает своего минимального значения на выпуклом, компактном множестве $F(t, x)$ из правой части (2). В частности, если $A(t, x)$ — единичная матрица, то $z(t, x)$ — ближайшая к началу координат точка множества $F(t, x)$.

2. Дифференциальное включение (2) и дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = z(t, x),\ z(t, x) \in H(t, x) \tag{4}$$

равносильны в том смысле, что множества их решений Каратеодори совпадают.

3. Для любой точки (t_0, x_0) найдется промежуток $[t_0, t_0 + \delta)$, на котором любые два решения уравнения (4) с начальными данными (t_0, x_0) совпадают.

Для каждых фиксированных (t, x) и $\lambda > 0$ через $z = J_\lambda(t, x)$ обозначим решение включения $z \in x + \lambda F(t, z)$ и пусть $F_\lambda(t, x) = (J_\lambda(t, x) - x)/\lambda$. Отметим, что формально $J_\lambda(t, x)$ и $-F_\lambda(t, x)$ представляют собой резольвенту и, соответственно, аппроксимацию Иосиды для отображения $x \to -F(t, x)$ при каждом фиксированном t.

Для произвольного множества $\Omega' \subset \Omega$ и числа $\delta > 0$ через Ω'^δ будем обозначать δ-окрестность множества Ω'.

У т в е р ж д е н и е 2. *Пусть выполняется условие А. Тогда:*

1. Для любого компактного множества $\Omega' \subset \Omega$ и числа $\delta > 0$ такого, что $\Omega'^\delta \subset \Omega$ существует число $\lambda' > 0$ такое, что для любых $\lambda \in [0, \lambda']$ определено непрерывное отображение $(\lambda, t, x) \to F_\lambda(t, x)$ липшицевое по x с константой $L = 1/\lambda$ и для любой фиксированной точки $(t, x) \in \Omega'$ при $\lambda \to +0$ выполняется: $F_\lambda(t, x) \to z(t, x)$.

2. Для любых начальных данных $(t_0, x_0) \in \Omega$ на некотором промежутке $[t_0, t_1]$ определены решение $x(t)$ включения (2) и решение $x_\lambda(t)$ уравнения

$$\dot{x} = F_\lambda(t, x)$$

для каждого $\lambda \in (0, \lambda']$ и существует константа $K > 0$ такая, что $\|x_\lambda(t) - x(t)\|^2 \leqslant \lambda K$ для любых $\lambda \in (0, \lambda']$ и $t \in [t_0, t_1]$.

Аналогичные вопросы рассматриваются для дифференциальных уравнений с запаздыванием $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
2. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анали. М.: Мир, 1988.

Abstract: The method of representation of the differential equations with a discontinuous right-hand part in the implicit form is investigated. The method will be coordinated to known approaches, such as the convex definition in sense of Filippov, a method of equivalent control. Within the framework of conditions of monotony the implicit method allows to receive one-digit equations of movement of discontinuous systems, in particular - the equations of sliding modes. Continuous approximations of Yosida for explosive systems and estimations for exact and approximating solutions are considered. The same questions for delay differential equations are stuied.

Keywords: differential equations with discontinuous right-hand part; right-hand condition of Lipschitz; sliding mode; approximation of Yosida; delay.

Финогенко Иван Анатольевич
д. ф.-м. н., профессор
Институт динамики систем
и теории управления Сибирского
отделения РАН
Россия, Иркутск
e-mail: fin@icc.ru

Ivan Finogenko
doctor of phys.-math. sciences, professor
Institute of System Dynamics
and Control Theory of SD RAS
Russia, Irkutsk
e-mail: fin@icc.ru