преобразований, запишется в виде

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{1+m\cos^2\alpha}{1+m}u_1 + \dfrac{m\sin 2\alpha}{2(1+m)}u_2 - r_1(t)\cos^2\alpha - r_2(t)\sin\alpha\cos\alpha, \\ \ddot{y} = \dfrac{m\sin 2\alpha}{2(1+m)}u_1 + \dfrac{1+m\cos^2\alpha}{1+m}u_2 - r_1(t)\sin\alpha\cos\alpha - r_2(t)\sin^2\alpha, \\ \ddot{\alpha} = -\big(\cos\alpha\big)u_1 - (\sin\alpha)u_2 + \dfrac{1+m}{m}\big(r_1(t)\cos\alpha + r_2(t)\sin\alpha\big), \end{cases} \tag{2}$$

где $m = m_2/m_1$, $r_1(t) = f_1(t) - m\ddot{p}_1(t)$, $r_2(t) = f_2(t) - m\big(1+\ddot{p}_2(t)\big)$.

Из (2) следует, что если $u_1(t) \equiv u_2(t) \equiv 0$, то при $r_1(t) \equiv 0$ (и только в этом случае) система (2) имеет тривиальное решение (*идеальное* движение). Таким образом, при идеальном движении точка m_1 осуществляет заданное движение и при этом отсутствует «раскачивание» точки m_2 относительно m_1. Если $p_1(t) = p_1 + vt$, $p_2(t) = p_2$ (горизонтальное движение с постоянной скоростью), $f_2(t) \equiv 0$, $f_1(t) = \text{const}$, то задача стабилизации упрощается. Доклад посвящён построению неупреждающего позиционного управления, решающего задачу стабилизации в описанном случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Николаев С. Ф., Тонков Е. Л., Феклистов И. В.* Колебания двух материальных точек, соединённых жёсткой тягой // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2006. Вып. 2(36). С. 201–204.
2. *Николаев С. Ф., Тонков Е. Л., Феклистов И. В.* Стабилизация механической системы, состоящей из двух материальных точек, соединённых жёсткой тягой нулевой массы // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2006. Вып. 3(37). С. 113–114.
3. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2001. 320 с.

Феклистов Игорь Вячеславович
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Москва
e-mail: artclimate@rambler.ru

Поступила в редакцию 10 мая 2007 г.

О ПРОИЗВОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРНОГО АРГУМЕНТА

© **В. И. Фомин**

Пусть E — банахово пространство; $L(E)$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E. Рассмотрим действительную операторную функцию $f : D(f) \subseteq L(E) \to L(E)$ действительного операторного аргумента Λ (действительные операторы — это, по определению, операторы из $L(E)$; такое название связано с тем, что при решении некоторых задач приходится рассматривать комплексные операторы $Z = A + \Im B$, где $A, B \in L(E)$, $\Im = \sqrt{-I}$ — мнимая операторная единица (см. [1]). Пусть $D(f)$ является открытым множеством, $\Lambda_0 \in D(f)$. Рассмотрим класс коммутирующих с Λ_0 операторов: $K_{\Lambda_0} = \{B \in L(E) \mid \Lambda_0 B = B\Lambda_0\}$. Известно ([2, с. 49]), что K_{Λ_0} является подпространством пространства $L(E)$.

Определение 1. Функция $Y = f(\Lambda)$ называется дифференцируемой в точке Λ_0, если $\exists\ A \in L(E), \exists\ O_\delta(\Lambda_0) \subset D(f) \mid$ для $\forall\ H \in O_\delta(\Theta) \cap K_{\Lambda_0}$ справедливо соотношение $f(\Lambda_0 + H) - f(\Lambda_0) = AH + \omega(\Lambda_0, H)$, где $\|\omega(\Lambda_0, H)\| = o(\|H\|)$ при $H \to \Theta$; при этом, оператор A называется производной функции $f(\Lambda)$ в точке $\Lambda_0 : f'(\Lambda_0) = A$ (здесь Θ — нулевой оператор).

Заметим, что определение 1 корректно, так как

а) $O_\delta(\Theta) \cap K_{\Lambda_0} \neq \varnothing$, ибо $\{\alpha I : |\alpha| < \delta\} \subset O_\delta(\Theta) \cap K_{\Lambda_0}$ а в случае $\Lambda_0 \neq \Theta$ $\left\{\alpha\,\Lambda_0 \,:\, |\alpha| < \frac{\delta}{\|\Lambda_0\|}\right\} \subset O_\delta(\Theta) \cap K_{\Lambda_0}$;

б) $\Lambda_0 + H \in O_\delta(\Lambda_0)$ при любом $H \in O_\delta(\Theta)$, в частности, при любом $H \in O_\delta(\Theta) \cap K_{\Lambda_0}$;

в) если функция $f(\Lambda)$ дифференцируема в точке Λ_0, то ее производная $f'(\Lambda_0)$ определяется единственным образом.

Пусть функция $Y = f(\Lambda)$ дифференцируема на открытом множестве $\Omega \subseteq D(f)$, т.е. дифференцируема в каждой точке этого множества. Тогда ее производная $Y' = f'(\Lambda)$ представляет собой действительную операторную функцию действительного операторного аргумента.

Если $f(\Lambda) \equiv C$, где C — некоторый оператор из $L(E)$, то $f'(\Lambda) = \Theta$.

Если $f(\Lambda) = \Lambda$, то $f'(\Lambda) = I$.

Если $f(\Lambda) = \Lambda^n$, $n \in N$, $n \geqslant 2$, то $f'(\Lambda) = n\Lambda^{n-1}$ (при выводе этой формулы существенным является условие $H \in K_{\Lambda_0}$ из определения 1).

Если функции $f_i(\Lambda)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, дифференцируемы на открытом множестве $G \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} D(f_i)$ и $C_i \in L(E)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то функция $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i f_i(\Lambda)$ дифференцируема на G и справедлива формула

$$\left[\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(\Lambda)\right]' = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i'(\Lambda) \tag{1}$$

(в частности, формула (1) сохраняет силу, если в ней вместо операторов C_i записать числа α_i, $1 \leqslant i \leqslant n$).

Для функции вида $P_n(\Lambda) = \Lambda^n + A_1\Lambda^{n-1} + ... + A_{n-1}\Lambda + A_n$, где $A_i \in L(E)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, справедлива формула

$$P_n^{(m)}(\Lambda) = m! \sum_{k=0}^{n-m} C_{n-k}^m A_k \Lambda^{n-m-k}, 1 \leqslant m \leqslant n;$$

$$P_n^{(m)}(\Lambda) = \Theta \text{ при } m > n.$$

Для функций $e^\Lambda = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^n}{n!}$, $\sin\Lambda = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Lambda^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos\Lambda = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Lambda^{2n}}{(2n)!}$ справедливы формулы

$$\left(e^\Lambda\right)' = e^\Lambda,\ (\sin\Lambda)' = \cos\Lambda,\ (\cos\Lambda)' = -\sin\Lambda.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фомин В.И.* О случае комплексных характеристических операторов линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конф. Воронеж, 2007. С. 231–232.
2. *Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Физматлит, 2002.

Фомин Василий Ильич
Тамбовский государственный
технический ун-т
Россия, Тамбов
e-mail: kulikov@apmath.tstu.ru

Поступила в редакцию 5 мая 2007 г.

ЛОМАНЫЕ ЭЙЛЕРА В СИСТЕМАХ КАРАТЕОДОРИ [1]

© **Д. В. Хлопин**

Известно [1], что в динамических системах с непрерывной правой частью некоторые решения могут получены как пределы ломаных Эйлера, мелкость разбиений которых стремится к нулю. В случае единственности ломаные Эйлера сходятся к единственному решению, получены при достаточно общем признаке единственности и соответствующие оценки сходимости [2]. Для измеримой правой части исследовались [3] всевозможные пределы последовательностей ломаных Эйлера, вмещающее их дифференциальное включение можно получить также из [4, Теорема 1.1.3].

В данной работе описываются условия, при которых ломаные Эйлера сходятся к пучку решений системы. Использующаяся для этого в непрерывном случае мелкость разбиений не применима для измеримой правой части. Действительно, можно показать (см. [5]), что в случае измеримой правой части существует такой класс эквивалентных (по Борелю) измеримых функций, для которого, при любой правой части из этого класса эквивалентности, малая мелкость разбиения не гарантирует близость соответствующей ломаной Эйлера к пучку решений системы, даже если все моменты разбиений взяты среди точек Лебега (или моментов непрерывности) правой части.

Вместо мелкости по заданной правой части и компакту содержащему все траектории системы, на множестве всевозможных разбиений отрезка времени строится метрика (множество разбиений оснащалось достаточно сложной топологией, например, в [6]).

Пусть дана удовлетворяющая условиям Каратеодори [7] система

$$\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 06-01-00414, № 07-01-96088).