УДК 519.622.2, 517.925.52

ОТСЛЕЖИВАНИЕ НЕПРОДОЛЖИМЫХ ТРАЕКТОРИЙ ЛОМАНЫМИ ЭЙЛЕРА [1]

© Д. В. Хлопин

Ключевые слова: ломаные Эйлера, непродолжаемые решения, приближение в метрике Хаусдорфа, интегральная устойчивость.

Аннотация: Исследуется возможность аппроксимации непродолжимых решений на всей области определения ломаными Эйлера из счетного числа отрезков; при этом сходимость понимается как сходимость графиков в метрике Хаусдорфа; показано, что в случае интегральной устойчивости решения вспомогательной системы и конечного интеграла от кривизны вдоль его графика для аппроксимации достаточно устремить к нулю размер отрезков ломаной.

Снабдим всякое конечномерное евклидово пространство евклидовой метрикой, на всевозможных замкнутых подмножествах такого пространства введем топологию Хаусдорфа [1]. Для всякой функции g пусть $\pi(g)$ и $\upsilon(g)$ — ее области определения и значений соответственно, а $Grg \subset \pi(g) \times \times \upsilon(g)$ — ее график. Через C^s_m обозначим множество таких непрерывных функций, что график $Grg \subset \mathbf{R}_{\geqslant 0} \times \mathbf{R}^m$ замкнут, а $\pi(g)$ связно.

Рассмотрим определенную на $\mathbf{R}_{\geqslant 0} \times \mathbf{R}^m$ дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{1}$$

Будем считать, что правая часть (1) непрерывна, и всякие два локальных решения $\varphi', \varphi'' \in C^s_m$ если совпадают в одной точке, то совпадают на общей области определения $\pi(\varphi') \cap \pi(\varphi'')$. Тогда всякому $b \in \mathbf{R}^m$ корректно сопоставить максимальное вправо решение системы (1), удовлетворяющее условию $x(0) = b$; обозначим его через $\varphi_b \in C^s_m$. Отметим, что для всякого компакта $I \Subset \mathbf{R}_{\geqslant 0}$ в силу теоремы о непрерывной зависимости следует $\lim_{b\to a} H(Gr\varphi_b|_I, Gr\varphi_a|_I)$ (см. [1]).

Обозначим через $\mathbf{D}$ множество возрастающих последовательностей из $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$, содержащих точку 0. Под диаметром разбиения $\Delta = (t_i)_{i\in\mathbf{N}}$ будем понимать число $d(\Delta) = \max_{i\in\mathbf{N}}(t_{i+1} - t_i)$. Определим $\pi(\Delta) = \cup_{i\in\mathbf{N}}[0, t_i]$, на этом множестве определим ломаную Эйлера по правилу: $\xi_\Delta(0) = c$, далее по индукции $\xi_\Delta(t_i) = \xi_\Delta(t_{i-1}) + f(t_{i-1}, \xi_\Delta(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1})$, на $[t_{i-1}, t_i]$ доопределим $\xi_\Delta(0)$ линейно.

Пусть $\pi(\varphi_c) = [0, T\rangle$ для некоторых $c \in \mathbf{R}^m$, $T \in \mathbf{R}_{\geqslant 0}$. Существуют ли функции из C^s_m, графики которых являются ломаными, сколь угодно близкими в топологии Хаусдорфа к $Gr\varphi_c$?

Известно, что из $d(\Delta) \to 0$ следует сходимость $\xi_\Delta|_I$ к решению $\varphi_c|_I$ на всяком компакте I из их общей области определения (см. [2]), однако у конечных разбиений ломаная ξ_Δ ограничена, следовательно, приблизить всю траекторию φ_c ими невозможно. Таким образом, искать надо неограниченные ломаные с бесконечным числом звеньев. Кроме того при аппроксимации необходимо условие $\pi(\Delta) \to \pi(\varphi_c)$, иначе удастся аппроксимировать не весь график $Gr\varphi_c$, а лишь его часть.

Заметим, что вряд ли ломаные Эйлера смогут приблизиться к φ_c лучше, чем соседние траектории, поэтому при аппроксимации φ_c разумно предположить $\lim_{b\to c}\varphi_b = \varphi_c$. Это условие оказывается достаточным для принципиальной возможности аппроксимации.

[1]Работа частично поддержана грантом РФФИ №09-01-004361 и Фондом Содействия Отечественной Науке.

П р е д л о ж е н и е. *Если* $\lim_{b\to c}\varphi_b = \varphi_c$, *то для всякого* $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ *можно найти такое разбиение* Δ, *что* $\pi(\Delta) = \pi(\varphi_c)$ *и* $\xi_\Delta \in B_\varepsilon(\varphi_c)$.

К сожалению построение такого разбиения Δ требует знания как траектории φ_c, но и всех близких к ней. Хотелось бы иметь численный метод, который даже без знания априори момента T мог бы строить достаточно точное разбиение $\Delta \in \mathbf{D}$.

В работе [3] для некоторых скалярных систем такой метод предложен, достаточно потребовать $d_f(\Delta) \to 0$, где $d_f(\Delta) = \max_{i\in\mathbf{N}}(t_{i+1} - t_i)||f(t_i, \xi_\Delta(t_i))||_m$ для всякой $\Delta = (t_i)_{i\in\mathbf{N}} \in \mathbf{D}$. Рассмотрим применимость этого метода.

Рассмотрим вспомогательную систему

$$y' = \begin{pmatrix} \frac{dt}{d\tau} \\ \frac{dx}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+||f(t,x)||_m^2}} \\ \frac{f(t,x)}{\sqrt{1+||f(t,x)||_m^2}} \end{pmatrix},\ t(0) = 0,\ x(0) = c. \tag{2}$$

Любой точке $Y \in \mathbf{R}_{\geqslant 0} \times \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ сопоставим число $\varkappa(Y)$ — кривизну в этой точке интегральной кривой уравнения (1) (фазовой кривой уравнения (2)).

П р е д л о ж е н и е. *Пусть правая часть системы* (1) *непрерывно дифференцируема, решение* $\bar{y}$ *задачи* (2) *интегрально устойчиво* [4, 5], *а кроме того для некоторого* $r \in \mathbf{R}_{>0}$ *конечен интеграл* $\int_{\mathbf{R}_{\geqslant 0}} ||\varkappa||_{C(B_r(\bar{y}(\tau)))} d\tau$. *Тогда для всякого* $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ *найдется такое* $\delta(\varepsilon) \in \mathbf{R}_{>0}$, *что для любого разбиения* $\Delta \in \mathbf{D}$, *у которого* $Gr\xi_\Delta$ *неограничен, из* $\mathbf{d}_f(\Delta) < \delta(\varepsilon), \mathbf{d}(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ *следует, что* $H(Gr\xi_\Delta, Gr\varphi_c) < \varepsilon$.

С л е д с т в и е. *Пусть правая часть системы* (1) *непрерывно дифференцируема, правая часть вспомогательной системы* (2) — *функция* $\mathbf{v}$ — *липшицева, решение* $\bar{y}$ *задачи (2) асимптотически устойчиво, а кроме того для некоторого* $r \in \mathbf{R}_{>0}$ *конечен интеграл* $\int_{\mathbf{R}_{\geqslant 0}} ||\varkappa||_{C(B_r(\bar{y}(\tau)))} d\tau$. *Тогда выполнено утверждение предложения.*

С л е д с т в и е. *Пусть правая часть скалярной и автономной системы* (1) *непрерывно дифференцируема, а для ее непродолжимого решения* φ_c *при некотором* $t \in [0, T\rangle$ *конечна полная вариация* $\vee_{t\in[t,T\rangle} \operatorname{arctg} \dot{\varphi}_c(t)$. *Тогда выполнено утверждение предложения.*

Показанные в [3] удобные условия на систему также суть следствие анонсируемого утверждения. Более того, там уже доказана интегральная стабильность (см. [3, Теорема 2]), а доказательство [3, Теорема 3] в точности опирается на конечность интеграла от кривизны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов В.В., Федорчук В.В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006.

2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

3. *Жуковский Е. С.* О параметрическом задании решения дифференциального уравнения и его приближенном построении // Изв. ВУЗов. Сер. Математика. 1996. Т. 407. № 4. С. 31-34.

4. *Вркоч И.* Интегральная устойчивость // Чехослов. мат. журнал. 1959. Т. 84. № 9. С. 71-129.

5. *Chow S.-N., Yorke J.A.* Lyapunov theory and perturbation of stable and asymptotically stable systems // J. Diffferential Equations. 1974. V. 15. P. 308-321.

Abstract: There is studied the possibility of approximation of nonextendable solutions on the domain by Euler's polygonal curves consisting of countable sets of line segments. Convergence is understood in the sense of graphs convergence in the Hausforff metric. It is shown that if a solution of the auxiliary system is integrably stable and the integral of curvature taken along its graph is finite, then for approximation it is sufficient to tend the size of polyline segments to zero.

Keywords: euler's polygonal curves, nonextendable solutions; approximation in the Hausdorff metric; integral stability.

Хлопип Дмитрий Валерьевич
к. ф.-м. н.
Институт математики и механики УрО РАН
Россия, Екатеринбург
e-mail: khlopin@imm.uran.ru

Dmitriy Khlopin
candidate of phys.-math. sciences
Institute of Mathematics and Mechanics of UrD RAS
Russia, Ekaterinburg
e-mail: khlopin@imm.uran.ru

УДК 532.5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА ВДОЛЬ ОСИ ВНИЗ

© **И. М. Цун**

Ключевые слова: капиллярная ламинарная струя; бесконечный жидкостный цилиндр; вязкая и плотная среда; математическая модель движения; решение краевой задачи.

Аннотация: Исследуется вопрос о тормозящем воздействии вязкой, плотной среды на капиллярную ламинарную струю.

Рассмотрим движение цилиндра вдоль оси вертикально вниз диаметром d с плотностью $\rho_{\text{м}}$ в вязкой среде с плотностью $\rho_{\text{с}}$, причем $\rho_{\text{м}} > \rho_{\text{с}}$. Очевидно, что тормозящее действие среды будет скомпенсировано, если архимедова и поверхностная тормозящая за счёт вязкости среды силы, приложенные к элементарному объему-диску цилиндра, в сумме не будут превосходить силы веса этого объёма. Это условие может быть приведено к виду:

$$d \geqslant \frac{4\,p_{\text{к}}}{(\rho_{\text{м}} - \rho_{\text{с}})\,g}\ , \tag{1}$$

где $p_{\text{к}}$ — касательные напряжения на поверхности движущегося цилиндра, возникающие вследствие вязкости среды, g — ускорение свободного падения, d — диаметр движущегося цилиндра.

Условие $\rho_{\text{м}} > \rho_{\text{с}}$ выполняется, в частности, при экструдировании расплава стали ($\rho_{\text{м}} \approx 7000$ кг/м^3) в воду и водные растворы ($\rho_{\text{с}} \approx 1000$ кг/м^3) и в расплавы солей ($\rho_{\text{с}} \approx (2 \div 3) \cdot 10^3$ кг/м^3) [1-4].

Таким образом, тормозящее воздействие среды оказывается существенным для струй относительно малых диаметров $0,2 \div 3$ мм. Величину касательных напряжений $p_{\text{к}}$ на поверхности цилиндра можно уменьшить снижением скорости v движения цилиндра. Явный вид зависимости $p_{\text{к}} = p_{\text{к}}(v)$ найден нами в результате решения задачи о движении бесконечного цилиндра вдоль оси в вязкой жидкости.

Сформулируем краевую задачу.

Уравнение движения — Навье-Стокса [5]:

$$\rho\frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = \rho\mathbf{g} - \nabla p + \mu_{\text{с}}\nabla^2\mathbf{w}, \tag{2}$$