

ЛИТЕРАТУРА

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
2. Казиев Э.А. Односторонние оценки при решении дифференциальных уравнений методом ломаных Эйлера // Известия Академии Наук Азербайджанской ССР, Серия физико-технических и математических наук. 1966. № 1. С. 112–119.
3. Mirc̆a S. Feedback differential systems: approximate and limiting trajectories // Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. 2004. V. 49, № 3. P. 83–96.
4. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986. 296 с.
5. Хлопин Д.В. Ломаные Эйлера в системах с измеримой по времени правой частью // Труды 38-й региональной мол. конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики». Екатеринбург, 29 янв. – 2 февр. 2007 г. Екатеринбург, 2007. С. 394–399.
6. Дружинин Э.И. Обусловленность прямых алгоритмов расчета программных управлений в нелинейных системах // Материалы конф. «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби» (CGS'2005). Екатеринбург, 22–25 июня 2005 г. Екатеринбург, 2005. С. 59–61.
7. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

Хлопин Дмитрий Валерьевич
 Институт математики и механики УрО РАН
 Россия, Екатеринбург
 e-mail: khlopin@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 23 апреля 2007 г.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С МНОГОЗНАЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ¹

© В. З. Цалюк

Рассматривается функционально-дифференциальная система

$$\dot{x}(t) = \int_0^t d_s A(t, s) x(s) + Bx(t) + f(t). \quad (1)$$

Здесь ядро $A : \Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, s) : t \in [0, \infty), s \in [0, t]\} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ удовлетворяет стандартному условию (R) [1, 2] и описывает управляемый объект. Член $Bx(t)$ отвечает за действие линейной обратной связи.

Кроме того,

$$\exists \delta_A > 0 : A(t, s) = 0 \text{ при } s < t - \delta_A,$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 03-01-00255 и № 06-01-00744).

$$V(A) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{vrai} \max_{t \geq 0} \operatorname{Var}_0^t A(t, \cdot) < \infty.$$

Мы предполагаем, что замкнутая управляемая система (1) экспоненциально устойчива, т.е. что ее матрица-функция Коши $W(t, s)$ удовлетворяет экспоненциальной оценке

$$|W(t, s)| \leq K e^{-\lambda(t-s)}, \quad t \geq s \geq 0,$$

с положительными K и λ .

Результат действия *неопределенного ограниченного запаздывания* в контуре обратной связи описывается функционально-дифференциальным включением вида

$$\dot{x}(t) \in \int_0^t d_s A(t, s) x(s) + B \text{ со } x[\max(0, t - \delta), t] + f(t). \quad (2)$$

Обозначим через $\mathfrak{R}$ класс функций $r : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что:

r удовлетворяет условию (R);

$r(t, s) = 0$ при $s \leq \max(0, t - \delta)$, $r(t, s) = 1$ для $s \geq t$, функции $r(t, \cdot)$ не убывают на $[t - \delta, t]$.

И пусть $\mathfrak{C}$ — множество соответствующих функций Коши для операторов

$$(\mathbf{R}x)(t) = \int_0^t d_s A(t, s) x(s) + B \int_0^t d_s r(t, s) x(s).$$

Т е о р е м а 1. Для любого решения x включения (2) существует такая функция $r \in \mathfrak{R}$, что x является решением уравнения

$$\dot{x}(t) = (\mathbf{R}x)(t) + f(t).$$

Т е о р е м а 2. Для любого $\beta \in (0, \lambda)$, если $\delta > 0$ достаточно мало, то существует такая константа $N > 0$, что все функции Коши $C \in \mathfrak{C}$ удовлетворяют оценке

$$|C(t, s)| \leq N e^{-\beta(t-s)}, \quad t \geq s \geq 0.$$

Отсюда

Т е о р е м а 3. Пусть $\beta \in (0, \lambda)$. При достаточно малом $\delta > 0$ существует такое $N > 0$, что для всех решений x включения (2) выполнена оценка

$$|x(t)| \leq N e^{-\beta t} |x(0)| + \int_0^t N e^{-\beta(t-s)} |f(s)| ds.$$

Как следствие, для $\gamma \in (0, \beta)$ обычным образом получаются неравенства, которые обычно имеют в виду, говоря об экспоненциальной устойчивости (см. [3]):

$$\sup_{t \geq 0} e^{\gamma t} |x(t)| \leq N |x(0)| + \frac{N}{\beta - \gamma} \operatorname{ess} \sup_{t \geq 0} e^{\gamma t} |f(t)|,$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma t} |x(t)| \leq \frac{N}{\beta - \gamma} \lim_{T \rightarrow \infty} \operatorname{ess} \sup_{t \geq T} e^{\gamma t} |f(t)|,$$

$$|x(t)| \leq N |x(0)| e^{-\beta t} + M e^{-\gamma t} \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} e^{\gamma s} |f(s)| ds,$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma t} |x(t)| \leq M \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+1} e^{\gamma s} |f(s)| ds.$$

Далее, если $f(t) = 0$ для $t > T > \delta$, то существует такое $M > 0$, что

$$\sup_{s \in [t-\delta, t]} |x(s)| \leq M e^{-\beta(t-T)} \sup_{s \in [T-\delta, T]} |x(s)|$$

при всех $t \geq T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Разматуллина Л. Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
2. Азбелев Н. В., Симонов П. М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: ПГУ, 2001.
3. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.

Цалюк Вадим Зиновьевич
Кубанский государственный ун-т
Россия, Краснодар
e-mail: vts@math.kubsu.ru

Поступила в редакцию 25 апреля 2007 г.

W-МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ: УСТОЙЧИВОСТЬ СТОЙКИ ПОД НАГРУЗКОЙ ¹

© В. З. Цалюк

В докладе кратко описывается применение W-метода к вариационным задачам с квадратичным функционалом, в которых искомой является функция, определенная на отрезке $[a, b]$. Суть метода: с помощью оператора Грина подходящим образом выбранной краевой задачи для уравнения в обыкновенных производных вариационная задача переводится в экстремальную задачу в пространстве $L_2(a, b)$ или в некотором его подпространстве.

Это позволяет получить необходимые и достаточные условия существования единственной точки минимума в терминах спектра линейного интегрального оператора в L_2 с симметричным ядром.

К таким задачам о существовании единственного минимума в вариационной задаче приводит применение вариационного принципа Лагранжа к задаче об устойчивости вертикальной стойки под продольной нагрузкой. При этом стержень может иметь переменные (возможно, разрывные) характеристики поперечного сечения, в том числе приводящие

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 04-01-96016, № 06-01-00744 и № 07-01-96060).