3. *G.A. Agranovich*, Observability criteria of linear discrete-continuous system // Functional Differential Equations. 2009. V. 16, № 1. P. 35–51.

4. *V.M. Marchenko, O.N. Poddubnaya*, Representation of solutions and relative controllability linear differential-algebraic systems with many aftereffects // Differentsialnye uravneniya. 2006. V. 42. № 6. P. 741–755. (Russian)

5. *V.P. Maksimov, A.L. Chadov*, Hybrid models in economic dynamics problems // Perm University Reports. Economics. Perm. 2011. № 2. P. 52–74. (Russian).

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-96054).

Максимов В.П., Чадов А.Л. Некоторые задачи целевого управления для одного класса непрерывно-дискретных систем. Рассматривается система функционально-дифференциальных уравнений с непрерывным и дискретным временем. Сформулирована общая задача целевого управления, получены условия разрешимости.

Ключевые слова: абстрактное функционально-дифференциальное уравнение; гибридные системы; задачи управления.

Maksimov V.P., Perm state university, Perm, Russian Federation, associated professor, Department of information system and mathematical methods in economy, e-mail: maksimov@econ.psu.ru.

Chadov A.L. Perm state university, Perm, Russian Federation, associated professor, PhD, Department of information system and mathematical methods in economy, e-mail: alchadov@yandex.ru.

УДК 519.6

ЭЛЕМЕНТЫ ПРИТЯЖЕНИЯ В АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧЕ О ДОСТИЖИМОСТИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

© **А.Г. Ченцов**

Ключевые слова: компакт; множество притяжения; полуалгебра; ультрафильтр.

Для абстрактной задачи о достижимости в топологическом пространстве (ТП) исследуются множества притяжения (МП), имеющие смысл асимптотических аналогов областей достижимости в задачах теории управления. Получены весьма общие представления МП в классе ультрафильтров (у/ф) пространства обычных решений. При этом используются у/ф широко понимаемых измеримых пространств. Это связано с тем, что в «обычном» случае, когда рассматриваются у/ф семейства всех подмножеств (п/м) упомянутого пространства, мы располагаем конструктивным способом построения только т. н. тривиальных у/ф, соответствующих обычным решениям, в то время как многие важные для теории и приложений асимптотические эффекты реализуются свободными у/ф (имеются в виду у/ф с пустым пересечением всех своих множеств), которые, грубо говоря, «не визуализируемы». Ситуация, однако, меняется в целом ряде случаев измеримых пространств с полуалгебрами и алгебрами множеств. Это делает актуальным исследование конструкций асимптотического (и, вообще говоря, несеквенциального) анализа с применением у/ф тех или иных семейств множеств. Наиболее известные построения у/ф такого типа соответствуют пространствам Стоуна, когда измеримая структура соответствует оснащению пространства обычных решений алгеброй множеств. Ниже приводится вариант, отвечающий оснащению полуалгеброй, а также некоторые «частичные» (с точки зрения описания МП) представления, использующие еще более общие измеримые структуры (т. н. π-системы).

1. Придерживаемся обозначений [1], напоминая лишь наиболее существенные (ниже через $\mathcal{P}(S)$ (через $\mathcal{P}'(S)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества S). Так, для непустого множества I

$$\pi[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\emptyset \in \mathcal{L}) \ \& \ (I \in \mathcal{L}) \ \& \ (A \cap B \in \mathcal{L} \ \ \forall A \in \mathcal{L} \, \forall B \in \mathcal{L})\}$$

соответствует [1, (1.5)] и определяет множество всех π-систем [2, с.14] в I с «нулем» и «единицей». Если $A \in \mathcal{P}(I)$, $\mathcal{L} \in \pi[I]$ и $n \in \mathbb{N} \overset{\triangle}{=} \{1;2;...\}$, то $\Delta_n(A, \mathcal{L})$ есть def множество всех кортежей $(L_i)_{i \in \overline{1,n}} : \ \overline{1,n} \longrightarrow \mathcal{L}$ таких, что A есть объединение всех множеств L_i, $i \in \overline{1,n}$, и $L_p \cap L_q = \emptyset \ \ \forall p \in \overline{1,n} \, \forall q \in \overline{1,n} \setminus \{p\}$. Тогда

$$\Pi[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{L} \, \exists n \in \mathbb{N} : \ \Delta_n(I \setminus L, \mathcal{L}) \neq \emptyset\}$$

есть множество всех полуалгебр п/м I. Кроме того, $(\mathrm{alg})[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in \pi[I] \mid I \setminus L \in \mathcal{L} \, \forall L \in \mathcal{L}\}$ есть множество всех алгебр п/м I. Если $\mathcal{L} \in \Pi[I]$, то

$$a_I^0(\mathcal{L}) \overset{\triangle}{=} \{A \in \mathcal{P}(I) \mid \exists n \in \mathbb{N} : \ \Delta_n(A, \mathcal{L}) \neq \emptyset\} \in (\mathrm{alg})[I]$$

есть алгебра п/м I, порожденная $\mathcal{L}$. Пусть также

$$\beta_0[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(I)) \mid \forall B_1 \in \mathcal{B} \, \forall B_2 \in \mathcal{B} \, \exists B_3 \in \mathcal{B} : \ B_3 \subset B_1 \cap B_2\}.$$

Тем самым определено множество всех баз фильтров множества I. До конца настоящего раздела фиксируем $\mathcal{I} \in \pi[I]$. Тогда

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid (\emptyset \notin \mathcal{F}) \ \& \ (A \cap B \in \mathcal{F} \, \forall A \in \mathcal{F} \, \forall B \in \mathcal{F}) \ \& \ (\forall F \in \mathcal{F} \, \forall L \in \mathcal{I} \\ (F \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{F}))\}$$

есть множество всех фильтров пространства $(I, \mathcal{I})$, а

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\}$$

есть множество всех у/ф $(I, \mathcal{I})$, $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \neq \emptyset$. Полагаем, что $\beta_{\mathcal{I}}^0[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta_0[I] \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{I}\}$. В последнем случае рассматриваются базы фильтров I, состоящие только из множеств семейства $\mathcal{I}$. В дальнейшем используются, как правило, базы такого типа. Имеем для таких баз обычное правило построения фильтра (порожденного базой):

$$(I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{I}] \overset{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{I} \mid \exists B \in \mathcal{B} : \ B \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{I}}^0[I].$$

Пусть $(\mathcal{J} - \mathrm{set})[I|\mathcal{I}] \overset{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{I} \mid L \cap X \neq \emptyset \ \ \forall X \in \mathcal{J}\} \ \ \forall \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$. Тогда

$$\beta_{\mathcal{I}}^{00}[I] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{I}}^0[I] \mid (I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{I}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})\} = \{\mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{I}}^0[I] \mid \forall L \in (\mathcal{B} - \mathrm{set})[I|\mathcal{I}] \, \exists B \in \mathcal{B} : \ B \subset L\}.$$

Последнее представление характеризует базы у/ф пространства $(I, \mathcal{I})$.

Пусть теперь

$$\Phi_{\mathcal{I}}(L) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid L \in \mathcal{U}\} \ \ \forall L \in \mathcal{I}.$$

Тогда семейство $(\mathbb{UF})[I; \mathcal{I}] \overset{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{I}}(L) : \ L \in \mathcal{I}\}$ есть база хаусдорфовой топологии $\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I]$ на множестве $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})$, причем в случае $\mathcal{I} \in (\mathrm{alg})[I]$ ТП

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}), \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[I])$$

есть непустой компакт (пространство Стоуна). В общем случае $\mathcal{I} \in \pi[I]$ имеем для всякого (непустого) семейства $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I})$, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}|\mathcal{H}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid \mathcal{H} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} \Phi_{\mathcal{I}}(H). \tag{1}$$

Полагаем далее: $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{I}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid \bigcap_{L \in \mathcal{U}} L = \emptyset\}$ (введено множество свободных у/ф).

2. В дальнейшем фиксируем непустое множество E. С учетом того, что семейство всех п/м E есть π-система из множества $\pi[E]$, полагаем, что $\mathfrak{F}[E] \overset{\triangle}{=} \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(E))$, получая множество всех фильтров E. Кроме того, $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \overset{\triangle}{=} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{P}(E))$ есть множество всех у/ф множества E; $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \subset \mathfrak{F}[E] \subset \beta_0[E]$.

Если $\mathcal{E} \in \pi[E]$ и $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$, то полагаем, что $\psi[\mathcal{E};\mathcal{F}] \overset{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{E} \mid \exists F \in \mathcal{F}: \ F \subset L\}$; если при этом $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H} \in \pi[E]$ и $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$, то $\psi[\mathcal{E};\mathcal{F}] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E})$. Данную процедуру используем при $\mathcal{H} \in \Pi[E]$ и $\mathcal{E} = a_E^0(\mathcal{H})$. Итак, до конца настоящего раздела фиксируем $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ и полагаем $\mathcal{A} \overset{\triangle}{=} a_E^0(\mathcal{L})$. Тогда [3, гл.10]

$$\psi[\mathcal{A};\mathcal{U}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

Кроме того, $\mathcal{U} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. Из двух этих свойств получаем, что

$$\psi[\mathcal{A};\cdot] \overset{\triangle}{=} (\psi[\mathcal{A};\mathcal{U}])_{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$$

есть биекция $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ на $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$, причем биекция, обратная к $\psi[\mathcal{A};\cdot]$, есть отображение

$$\mathcal{U} \longmapsto \mathcal{U} \cap \mathcal{L}: \ \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Оператор* $\psi[\mathcal{A};\cdot]$ *есть гомеоморфизм ТП* $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}),\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$ *на* $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}),\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E])$.

Как следствие получаем, что ТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$ есть непустой компакт. Гомеоморфные компакты $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$ и $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E])$ можно не различать, однако конкретное описание $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$ может оказаться несколько проще (см. пример в заключении статьи).

3. Рассмотрим вопрос о представлении МП в абстрактной задаче о достижимости с ограничениями асимптотического характера, фиксируя $\mathcal{L} \in \pi[E]$, ТП $(\mathbf{H},\tau)$ и оператор $\Psi: \ E \longrightarrow \mathbf{H}$. Используем понятие сходимости (в $(\mathbf{H},\tau)$) базы фильтра, принятое в [4, гл. I]; упомянутую сходимость обозначаем через $\overset{\tau}{\Longrightarrow}$. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то через $\Psi^1[\mathcal{E}]$ обозначаем (непустое) семейство образов $\Psi^1(\Sigma) \overset{\triangle}{=} \{\psi(x): \ x \in \Sigma\}$ всевозможных множеств $\Sigma \in \mathcal{E}$; если при этом $\mathcal{E}$ — база фильтра в E (имеются в виду фильтры из $\mathfrak{F}[E]$), то $\Psi^1[\mathcal{E}]$ есть база фильтра в $\mathbf{H}$. Если $y \in \mathbf{H}$, то через $(y - \mathrm{bas})[\tau]$ обозначаем множество всех локальных баз (фундаментальных систем окрестностей) ТП $(\mathbf{H},\tau)$ в точке y. Полагаем далее, что выполнено следующее свойство локальной $\mathcal{L}$-измеримости Ψ:

$$\forall y \in \mathbf{H} \ \exists \mathcal{Y} \in (y - \mathrm{bas})[\tau]: \ \Psi^{-1}(Y) \in \mathcal{L} \ \ \forall Y \in \mathcal{Y}.$$

Далее учитываем, что $\mathcal{L}$-фильтры и, в частности, $\mathcal{L}$-у/ф являются базами фильтров E. Поэтому при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ имеем $\Psi^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[\mathbf{H}]$. Если ТП $(\mathbf{H},\tau)$ компактно, то

$$\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \exists h \in \mathbf{H}: \ \Psi^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} h.$$

Всюду в дальнейшем полагаем, что $(\mathbf{H}, \tau)$ — компакт (отделимое компактное ТП). Тогда из последнего свойства имеем, что $\exists! f \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}: \Psi^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} f(\mathcal{U}) \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. С учетом этого полагаем, что отображение $\varphi \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$ определяется условием

$$\Psi^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} \varphi(\mathcal{U}) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

Утверждение 1. *Отображение* φ *непрерывно в смысле ТП* $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$ *и* $(\mathbf{H}, \tau)$.

До конца настоящего раздела полагаем, что $\forall L \in \mathcal{L}\ \forall x \in E \setminus L\ \exists \Lambda \in \mathcal{L}:$

$$(x \in \Lambda)\ \&\ (\Lambda \cap L = \emptyset). \tag{2}$$

Тогда (при условии (2)) имеем следующее важное свойство:

$$((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x] \overset{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \ \forall x \in E.$$

При этом $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) \cup \{((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x] : \ x \in E\} = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) \cap \{((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x] : x \in E\} = \emptyset$. Соответственно, $((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot] \overset{\triangle}{=} (((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x])_{x \in E} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^E$ определяет вложение E в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, причем

$$\varphi \circ ((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot] = \Psi. \tag{3}$$

Легко видеть, что $((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]^{-1}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{H})) = \bigcap\limits_{H \in \mathcal{H}} H \ \ \forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$. Отметим важное свойство плотности: $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathrm{cl}(\{((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[x] : \ x \in E\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$, где $\mathrm{cl}(\cdot, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$ — оператор замыкания в ТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$.

Введем в рассмотрение МП в произвольном ТП, следуя [1, с. 119]: если $(Y, \mathbf{t})$ есть ТП, $f \in Y^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $(\mathbf{as})[E; Y; \mathbf{t}; f; \mathcal{E}]$ есть МП в ТП $(Y, \mathbf{t})$, соответствующее случаю, когда семейство $\mathcal{E}$ используется в качестве ограничений асимптотического характера. В целях полноты изложения напомним одно из эквивалентных представлений упомянутого МП, используя символику [1]. Пусть $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\}$. Тогда

$$(\mathbf{as})[E; Y; \mathbf{t}; f; \mathcal{E}] = \{y \in Y \mid \exists \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \mid f^1[\mathcal{U}] \overset{\mathbf{t}}{\Longrightarrow} y\}.$$

Напомним, что $\varphi^1(S) \overset{\triangle}{=} \{\varphi(s) : \ s \in S\}$ для каждого множества $S \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$ (образ множества S при отображении φ).

Утверждение 2. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, *то*

$$\varphi^1((\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; ((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]; \mathcal{E}]) \subset (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \Psi; \mathcal{E}].$$

4. Всюду в настоящем разделе полагаем, что $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, получая в виде $(E, \mathcal{L})$ измеримое пространство с полуалгеброй множеств. Тогда, в частности, $\mathcal{L}$ удовлетворяет всем условиям, накладываемым на семейство п/м E в предыдущем разделе (включая (2)); кортеж

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], ((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot], \varphi)$$

есть $(\mathbf{H}, \tau, \Psi)$-компактификатор в смысле определения 3.1 работы [5] (см. (3), утверждение 1). Поэтому [5, следствие 3.1]

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \Psi; \mathcal{E}] = \varphi^1((\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; ((E, \mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]; \mathcal{E}]) \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{4}$$

Если $L \in \mathcal{L}$, то множество $\Phi_{\mathcal{L}}(L)$ замкнуто в компакте $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$.

Утверждение 3. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то* $(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]; ((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[\cdot]; \mathcal{E}] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$.

Из (4) и предложения 3 вытекает следующее положение о представлении МП в виде непрерывного образа компакта.

Теорема 1. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то справедливо равенство*

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \Psi; \mathcal{E}] = \varphi^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})).$$

Заметим, что требование $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$, используемое в теореме 2, может быть ослаблено на основе конструкции [1, следствие 3.1]. Известны примеры измеримых пространств $(E, \mathcal{L})$ с полуалгебрами множеств, для которых $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ допускает исчерпывающее описание, включая конструктивное построение всех свободных [6, с. 271] у/ф. Один такой пример рассматривается ниже.

5. В настоящем разделе рассматривается один конкретный пример построения компакта у/ф полуалгебры множеств. Пусть далее $E = [0,1]$ и

$$\mathcal{L} \triangleq \{\, L \in \mathcal{P}(E) \mid \exists c \in E\ \exists d \in E :\ (]c,d[\subset L)\ \&\ (L \subset [c,d])\}$$

(здесь и ниже при обозначении промежутков вещественной прямой $\mathbb{R}$ (открытых, полуоткрытых и замкнутых) используем только квадратные скобки). Тогда $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ есть семейство всех промежутков вещественной прямой (открытых, полуоткрытых и замкнутых), содержащихся в E. В связи с представлением множества свободных у/ф отметим, что

$$(\mathcal{J}_t^{(-)} \triangleq \{[c,t[:\ c \in [0,t[\} \in \beta^{00}_{\mathcal{L}}[E]\ \ \forall t \in]0,1])\ \&\ (\mathcal{J}_t^{(+)} \triangleq \{]t,c] :\ c \in]t,1]\} \in \beta^{00}_{\mathcal{L}}[E]\ \ \forall t \in [0,1[).$$

Утверждение 4. $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) = \{(E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)}|\mathcal{L}] :\ t \in]0,1]\} \cup \{(E - \mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(+)}|\mathcal{L}] :\ t \in [0,1[\}$.

Поскольку (тривиальные) у/ф $((E,\mathcal{L}) - \mathrm{ult})[t]$, $t \in E$, допускают явное представление, утверждение 4 доставляет исчерпывающее описание множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$.

Отметим для рассматриваемого пространства $(E, \mathcal{L})$ простейший пример выполнения условия локальной $\mathcal{L}$-измеримости. В самом деле, пусть отображение Ψ раздела 3 есть монотонно неубывающая функция из $E = [0,1]$ в вещественную прямую $\mathbb{R}$:

$$\Psi(t_1) \leqslant \Psi(t_2)\ \ \forall t_1 \in E\ \forall t_2 \in [t_1, 1].$$

Тогда $\Psi^1[E]$ есть непустое п/м промежутка $[\Psi(0), \Psi(1)]$. Этот промежуток мы и принимаем за $\mathbf{H}$, полагая далее $\mathbf{H} = [\Psi(0), \Psi(1)]$. При этом $\Psi : E \longrightarrow \mathbf{H}$. В качестве τ используем обычную $|\cdot|$-топологию отрезка $\mathbf{H}$; получили непустой компакт $(\mathbf{H}, \tau)$. Как следствие монотонности Ψ имеем [3, с. 39] следующее свойство измеримости относительно полуалгебры $\mathcal{L}$: $\Psi^{-1}(]-\infty, c[) \in \mathcal{L}\ \forall c \in \mathbb{R}$. Тогда как легко видеть,

$$\Psi^{-1}(]\alpha, \beta[\cap \mathbf{H}) = \Psi^{-1}(]\alpha, \beta[) \in \mathcal{L}\ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \beta \in]\alpha, \infty[.$$

Если $h \in \mathbf{H}$, то $\mathcal{H} \triangleq \{]h - \varepsilon, h + \varepsilon[\cap \mathbf{H} :\ \varepsilon \in]0, \infty[\} \in (h - \mathrm{bas})[\tau]$ и при этом $\Psi^{-1}(H) \in \mathcal{L}\ \forall H \in \mathcal{H}$. Свойство локальной $\mathcal{L}$-измеримости Ψ установлено. Заметим, что, поскольку полуалгебра $\mathcal{L}$ замкнута относительно конечных пересечений, нетрудно построить векторный аналог отображения Ψ с требуемым свойством локальной $\mathcal{L}$-измеримости (достаточно реализовать построение нужной вектор-функции на E покомпонентно, применяя всякий раз монотонно неубывающие отображения).

6. Конструкции расширений широко используются для представления объектов, подобных МП. Речь идет о построении обобщенных задач, которые могут доставлять полезные

представления решений, соблюдающих те или иные системы ограничений с высокой, но все же конечной степенью точности (решения «на грани фола»). В случае экстремальных задач возможна ситуация, когда исчезающе малое ослабление стандартных ограничений приводит к существенному улучшению достигаемого результата. В случае же задач о достижимости (и их аналогов) возможно скачкообразное расширение множества, характеризующего возможности управляющей стороны. В этой связи см. примеры и обсуждение в [7, гл. III] (имеются в виду задачи теории управления). Обобщенные управления, используемые в [7–9], реализуют скользящие режимы и играют объективно роль, подобную у/ф в настоящей работе. Важную роль играют конструкции расширения в игровых задачах. Сейчас отметим только одно обстоятельство, связанное с задачами теории дифференциальных игр: в определении стабильного моста, предложенном Н.Н. Красовским, предусматривается использование обобщенной реакции на обычное и, более того, постоянное управление игрока-противника. Наряду с правилом эктремального сдвига, это сыграло важную роль в доказательстве фундаментальной теоремы Н.Н. Красовского и А.И. Субботина об альтернативе в нелинейной дифференциальной игре [9]. В [9] и в целом ряде других работ управления-меры (обобщенные управления) широко использовались также при построении вспомогательных программных конструкций для решения нелинейных дифференциальных игр.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ченцов А.Г.* Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142.

2. *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.

3. *Ченцов А.Г.* Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2010.

4. *Бурбаки Н.* Общая топология. М.: Наука, 1968.

5. *Ченцов А.Г.* Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13. № 2. С. 184–217.

6. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.

7. *Варга Дж.* Оптимальное управления дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

8. *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975.

9. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука,1974.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований № 09-01-00436, № 10-01-96020.

Chentsov A.G. Attraction elements in abstract problem about attainability with constrains of asymptotic character. For abstract problem about attainability in topological space, attraction sets (AS) having the sense of asymptotic analogs of attainability domains in control theory are investigated. Very general representations of AS in the ultrafilters class in the space of usual solutions are obtained. Ultrafilters of widely interpreted measurable spaces are used. This is connected with difficulties under representation of ultrafilters of the family of all subsets of usual solutions: we have the constructive representation only for trivial ultrafilters. But very important asymptotic effects are realized by free ultrafilters (we keep in mind ultrafilters with empty intersection of all own sets); such ultrafilters are «not visualized». But, the situation is changed for some measurable spaces with semi-algebras and algebras of sets. Therefore, investigation of constructions of asymptotic (and, generally speaking, non-sequential) analysis with ultrafilters of the sets families is actual. The more known such constructions are connected with the Stone spaces. Then measurable structure corresponds to the equipment of the space of usual solutions with algebra of sets. Below, the equipment variant used a semi-algebra of sets is considered. Some «partial» (in the sense of representation of AS) consructions used more general measurable structures are used also.

Key words: compactum; attraction set; semi-algebra; ultrafilter.

Ченцов Александр Георгиевич, Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом управляемых систем, e-mail: chentsov@imm.uran.ru.

УДК 517.957, 517.988, 517.977.56

О ТОТАЛЬНОМ СОХРАНЕНИИ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

© А.В. Чернов

Ключевые слова: тотальное сохранение глобальной разрешимости; функционально-операторное уравнение; поточечная оценка решений.

Для широкого класса управляемых начально-краевых задач, связанных с нелинейными уравнениями в частных производных, формулируются достаточные условия тотального (по всем допустимым управлениям) сохранения глобальной разрешимости. Кратко описывается область применения указанных условий.

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbb{N}$ — заданные числа, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое (в смысле Лебега) ограниченное множество, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{U}$ — некоторые лебеговы пространства функций на множестве Π с индексами суммируемости из отрезка $[1; +\infty]$; $\mathcal{X} \subset \mathcal{Z}$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}$; $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}^s$ — некоторое множество, $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ — заданный *линейный ограниченный оператор* (ЛОО). В [1] было предложено для изучения различных вопросов оптимизации управляемых распределенных систем использовать следующее функционально-операторное уравнение:

$$z(t) = f\big(t, A[z](t), u(t)\big), \quad t \in \Pi, \quad z \in \mathcal{Z}^m. \tag{1}$$

Здесь $u \in \mathcal{D}$ — управление, $f(t, y, u) : \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ — заданная функция, измеримая по $t \in \Pi$ и непрерывная по $\{y; u\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$ и такая, что $\forall y \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{D}$ суперпозиция $f\big(., y(.), u(.)\big) \in \mathcal{Z}^m$. Как показывают многочисленные примеры [2, 3], к уравнению (1) сводятся распределенные управляемые системы достаточно широкого класса. Нам будет удобно вместо уравнения (1) использовать равносильное (при определенных условиях [4]) уравнение следующего вида:

$$x(t) = \theta(t) + A\Big[f\big(., x(.), u(.)\big)\Big](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathcal{X}^\ell, \tag{2}$$

где $\theta \in \mathcal{X}^\ell$. К уравнению (2) от управляемой начально-краевой задачи можно перейти и непосредственно [4–6]. Представление (2) использовалось также в [7].

В [1–3, 5] (см. также краткий обзор [8]) была построена теория *устойчивости существования глобальных решений* уравнений (1) и (2) по возмущению управлений u и θ, правой