профильных классов ресурсы Интернета. Учащиеся осваивают технологии компьютерных презентаций, работы с интерактивными досками, что в значительной степени индивидуализирует учебный процесс и развивает деятельностные формы применения математических методов исследований к решению прикладных задач. Все это требует от преподавателя математики не только высокого уровня владения информационными технологиями, но и достаточной широты мышления, позволяющей устанавливать связующие звенья в процессе математизации естественно-научных знаний и решения прикладных задач.

Черникова Ирина Юрьевна
Пермский государственный технический ун-т
Россия, Пермь
e-mail: irina@lyceum.pstu.ac.ru

Поступила в редакцию 30 апреля 2007 г.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАЗНОСТЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

© С. С. Чудова

В работе рассматривается задача об оптимальном восстановлении k-й разности последовательности при условии, что сама последовательность известна неточно. Это дискретный аналог задачи об оптимальном восстановлении k-й производной функции по неточной информации о самой функции. Дискретизация такой задачи важна для численной реализации соответствующих алгоритмов восстановления.

Постановка задачи

Пусть требуется восстановить k-ю ($k \geqslant 1$) разность некоторой последовательности $\{x_j\} \in l_2$ по следующей информации:

1) дана последовательность $\{y_j\} \in l_2$, такая, что $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j - y_j|^2 \leqslant \delta^2$, $\delta > 0$;

2) известно, что искомая последовательность принадлежит классу последовательностей W^n, $k < n$, которые удовлетворяют условиям: $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta^n x_j|^2 \leqslant 1$, где $\{\Delta^n x_j\}$ – n-я разность последовательности $\{x_j\}$.

Под оптимальным восстановлением k-й разности по данной информации понимается следующее. Любое отображение $m\colon l_2 \to l_2$ объявляется методом восстановления и его погрешность оценивается величиной

$$e(k, W^n, \delta, m) = \sup_{\{x_j\}\in W^n, \{y_j\}\colon \sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j - y_j|^2 \leqslant \delta^2} \|\{\Delta^k x_j\} - m(\{y_j\})\|_{l_2}.$$

Нас интересует величина

$$E(k, W^n, \delta) = \inf_{m\colon l_2 \to l_2} e(k, W^n, \delta, m),$$

которая называется погрешностью оптимального восстановления, и метод $\widehat{m}\colon l_2 \to l_2$, называемый оптимальным методом восстановления, на котором нижняя грань достигается.

Т е о р е м а.

$$E(k, W^n, \delta) = \begin{cases} \delta^{\frac{2(n-k)}{n}}, & \delta \geqslant 2^{-n} \\ \delta^2 2^{2k}, & \delta < 2^{-n}. \end{cases}$$

Пусть $\hat{f}(\omega) = \frac{\hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_1 |e^{i\omega} - 1|^{2n} + \hat{\lambda}_2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k e^{-ikw}$, *где*

$$\hat{\lambda}_1 = \begin{cases} 0, & \delta < 2^{-n} \\ \frac{k}{n} \delta^{\frac{2(n-k)}{n}}, & \delta \geqslant 2^{-n} \end{cases}; \quad \hat{\lambda}_2 = \begin{cases} 2^{2k}, & \delta < 2^{-n} \\ \left(1 - \frac{k}{n}\right) \delta^{\frac{-2k}{n}}, & \delta \geqslant 2^{-n}, \end{cases}$$

тогда k-я разность последовательности $\{\hat{x}_j\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\omega) e^{ij\omega}\, d\omega$ *является оптимальным методом.*

По поводу доказательства этой теоремы отметим следующее. Несложные рассуждения показывают, что

$$E(k, W^n, \delta) \geqslant \sup_{\{x_j\} \in W^n, \sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^2 \leqslant \delta^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta^k x_j|^2.$$

Задача справа, после перехода к образам Фурье, сводится к задаче выпуклого программирования, решение которой может быть найдено, используя стандартные методы выпуклой оптимизации (см. [1]). Таким образом, мы получаем оценку снизу для величины $E(k, W^n, \delta)$.

Для получения оценки сверху и нахождения оптимального метода восстановления здесь используются соображения, связанные с выпуклой двойственностью и тем, что l_2 — гильбертово пространство.

Общие подходы к решению подобных задач оптимального восстановления разработаны в работах [2] и [3]. Там же исследованы непрерывные аналоги рассмотренной здесь задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

2. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. С. 79–100.

3. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его приложения. 2003. Т. 37. Вып. 3. С. 51–64.

Чудова Софья Сергеевна
Московский государственный институт
радиотехники, электроники и автоматики
Россия, Москва
e-mail: ChudovaSofya@gmail.com

Поступила в редакцию 5 мая 2007 г.