УДК. 539.374.1

# СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕЗОМЕХАНИКА ДЕФОРМАЦИИ

© А.М. Авдеенко

*Россия, Москва, Технологический университет*

Avdeenko A.M. Statistic mesomechanic of deformation. Collective dynamics of plastic deformation is investigated using field approach. Dynamic of correlation length and deviation of displacement field fluctuations is parameterized by dimensionless strain-hardening rate.

Проблеме самоорганизации мезовозмущений пластического течения посвящено ряд работ [1–3]. Теоретическое описание в рамках ренормгруппового подхода предложено в [3, 4], учет флуктуационных поправок для синтеза эффективной диаграммы деформации неоднородных сред проведен в работе [5]. Представляет интерес максимально строгая формулировка исходных модельных допущений.

Рассмотрим замкнутое твердое тело в объеме $\Omega_d$, граница которого нагружается заданной системой внешних сил. Разобьем $\Omega_d$ на $N$ малых «кубиков» $\nu_i$ и поставим каждому из них в соответствие поле смещений $A_\mu$ ($\mu$ = 1,2,3) как разности координат каждой точки в лабораторной системе в исходном состоянии $r_i$ и после нагружения: $r_i' A_\mu = r_i - r_i'$. Когда число $N$ велико ($\nu_i << \Omega_d$), естественный способ описания эволюции подобной системы – статистический, через введение $3N$-мерной плотности распределения $f\left(A_\mu(i)\right)$, которую в пределе $N \to \infty$ представим в виде:

$$f\left[A_\mu\right] = e^{W[A\mu]},$$

где величину $W[A_\mu]$ назовем производящим функционалом открытой системы.

Предположим, что в исходном (ненагруженном) состоянии рассматриваемое тело однородно и изотропно. Тогда производящий функционал, в достаточно общем виде, можно представить как функциональный полином:

$$W[A_\mu] = \int ..\int \sum_{k=2}^{\infty} \frac{V_k^{\mu..\nu}(r_i,t_i)}{k} A_{\mu,p} \cdot\cdot A_{q,\nu} dr_1 dt_1 \cdot\cdot dr_i dt_i \cdot\cdot$$

где $V_k^{\mu..\nu}(r_i,t_i)$, ($i$ = 1..$k$) – действительные тензоры ранга «$2k$».

Условимся первые $k$ индексов $(\mu = 1,2,3)$ относить к компонентам поля $A_\mu$, последующие $k$ индексов $\mu, \nu = 0,1,2,3)$, – к производным. Плотность распределения $f[A_\mu]$ – монотонная функция $W[A_\mu]$, поэтому наиболее вероятному процессу соответствует траектория $\overline{A}_\mu$, или $\overline{A}_{\mu,\nu}$ ($\mu, \nu = 1,2,3$), удовлетворяющая вариационному уравнению $\dfrac{\delta W[A_\mu]}{\delta A_\mu} = 0$ при заданных начальных и граничных условиях. Решение $\overline{A}_\mu, \overline{A}_{\mu,\nu}$ назовем «классической» траекторией, разность $\delta A_{\mu,\nu} = A_{\mu,\nu} - \overline{A}_{\mu,\nu}$ – флуктуациями. В дальнейшем ограничимся рассмотрением так называемых «активных» траекторий, для которых $\dfrac{\partial s}{\partial t} \geq 0$ в любой точке ($r$, $t$), где $s = \int_{t_0}^{t} \left( \dfrac{\partial A_{\mu,\nu}}{\partial t} \dfrac{\partial A^{\mu,\nu}}{\partial t} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau$ – внутренний параметр системы – «длина» классической траектории, а твердое тело $\Omega_d^n$ по отношению к «классической» траектории «$M$-образец» в терминологии школы А.А. Ильюшина.

Для построения производящего функционала флуктуаций поля $A_{\mu,\nu}$ разложим $W[A_\mu]$ в функциональный ряд Тейлора в окрестности «классического» решения $\overline{A}_{\mu,\nu}$ и воспользуемся известной из дифференциальной геометрии возможностью задания производных любого порядка по времени в виде функций внутренней геометрии «классической» траектории – ее длины $s$, $\vartheta_1(s)...\vartheta_{n-1}(s)$ скалярных кривизн и кручения $\vartheta_n(s)$ ($n$ – количество независимых компонент тензора $A_{\mu,\nu}$). Для активных траекторий на «$M$-образце» интегрирование по пространственным координатам выражения для производящего функционала дает несущественные константы, пропорциональные некоторым степеням $\Omega_d^n$, по времени – параметризует вершины $V_k^{\mu..\nu}$ величинами $s$, $\vartheta_1(s)...\vartheta_n(s)$. Обозначим $W[A_\mu]$ производящий функционал флуктуаций с вершинами $V_k^{\mu..\nu}\left(r_i t_i, s, \vartheta_n(s)\right)$.

Нормированное гауссовское среднее с весом $e^W$ при $V_k^{\mu...\nu} = 0$ ($k$ > 2) назовем свободной корреляционной функцией деформации и представим ее в виде:

$$R_{20}^{\mu..\nu}(r_1,r_2) = < A^{\mu,p}(r')A^{q,\nu}(r'+r) >= \\ = \frac{\int A^{\mu,p}(r_1)A^{q,\nu}(r_2)e^{W[A_\mu]}dA_\mu}{\int e^{W[A_\mu]}dA_\mu}.$$

Оператор $V_{20}^{\mu...\nu}(r_i)$, обратный свободной корреляционной функции $R_{20}^{\mu..\nu}(r)$, определим с помощью соотношения:

$$\int V_2^{\mu pq\nu}(r_1,r_1')R_{20,mpqn}(r_1'-r_2)dr_1' = \delta_m^\mu\delta_n^\nu\delta(r_1-r_2)\delta(t_1-t_2)$$

и назовем свободной вершиной второго порядка.

Для системы с $V_k^{\mu...\nu}(r_i,t_i)=0$ ($k$ > 2) свободная вершина второго порядка совпадает с вершиной $V_2^{\mu...\nu}(r_i,t_i)$. В общем случае, когда $V_k^{\mu...\nu}(r_i,t_i)\neq 0$ ($k$ > 2), нормированное двухточечное среднее с весом $\mathbf{e}^W$ определяет полную корреляционную функцию $R_2^{\mu..\nu}(r,t)$. Оператор $V_2^{\mu...\nu}(r_i,t_i)$, обратный полной корреляционной функции, дается тем же выражением при замене $R_{20}^{\mu...\nu}(r,t)\to R_2^{\mu...\nu}(r,t)$. Эта величина учитывает взаимодействия (нелинейные эффекты) и в дальнейшем будет называться полной вершиной второго порядка. Полная вершина, вообще говоря, не совпадает с оператором при квадрате полевых переменных в исходном производящем функционале и будет теперь обозначаться $V_{20}^{\mu...\nu}(r_i,t_i)$.

Использование касательного функционального преобразования Лежандра позволяет получить выражение для операторов, обратных полным корреляционным функциям порядка 2$k$, использование которых потребуется при вычислениях $R_2^{\mu...\nu}(r_i,t_i)$. Например, оператор обратный полной четырехточечной корреляционной функции $R_4^{\mu...\nu}(r_i,t_i)$ – полная вершина четвертого порядка в модели с max $n$ = 4 – решение интегрального уравнения:

$$R^{\nu_1'...\nu_4'}_{4\mu_1'...\mu_4'}(r_i,t_i) - \int..\int V^{\mu_1...\mu_4}_{4\nu_1...\nu_4}(r_i,t_i,r_i',t_i')\times \\ \times\prod_{i=1}^{4} R^{\nu_i\nu_i'}_{2\mu_i\mu_i'}(r_i,t_i,r_i',t_i')dr_i'dt_i' = 0.$$

Это выражение связывает вершины любого порядка с корреляционными функциями, т. е. указывает на существование принципиальной возможности параметризации статистики флуктуаций поля с помощью набора кривизн и кручения на «активной» классической траектории для «$M$-образца».

Определим фурье-образы:

$$A_\mu(p,\omega) = \int A(r,t)e^{i(pr-\omega t)}.$$

Назовем моды с $\omega\neq 0$ «быстрыми» и введем «медленный» производящий функционал:

$$W'[A_\mu] = -\ln\int e^{W[A_\mu]}d'A_\mu,$$

где $d'A_\mu$ – символ стохастического интегрирования по «быстрым» переменным.

«Классическая» траектория $\overline{A}_{\mu,\nu}$ для $W'[A_\mu]$ удовлетворяет уравнению: $\dfrac{\delta W'[A_\mu]}{\delta A_\mu}=0$ и, вообще говоря, не совпадает с траекторией исходного функционала $W[A_\mu]$, однако параметризация для процессов с $ds \geq 0$ и соотношения для корреляционных функций остаются справедливыми.

Положим, что в исходном (ненагруженном) состоянии «классическая» траектория соответствует уравнению равновесия модели упругого псевдоконтинуума Коссера:

$$\nabla^2 A_\mu + \frac{1}{1-2\nu}\nabla_\mu(\nabla_\nu A^\nu) - \xi_0^2\nabla^2(\nabla^2 A_\mu - \nabla_\mu\nabla^\nu A_\nu) = 0,$$

где $\xi_0$ – структурный масштаб упругого псевдоконтинуума, $\nabla_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\nabla^2 = \sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}$.

Разобьем поле $A_\mu$ на продольную и поперечную составляющие: $A_\mu = A_\mu^n + A_\mu^t$, тогда соответствующие дисторсии $A_{\mu,\nu}^n = 1/n\,\delta_{\mu,\nu}A_{k,k}$ и $A_{\mu,\nu}^t = A_{\mu,\nu} - A_{\mu,\nu}^n$. Свободную вершину второго порядка представим в виде суммы $V_{20}^{\mu...\nu}(r_i) = V_{20}^{\mu...\nu,n}(r_i) + V_{20}^{\mu...\nu,t}(r_i)$:

$$V_{20}^{\mu...\nu,n}(r_i, s\to +0) = \frac{T_2^{\mu...\nu,n}}{V<\varepsilon_2^2>}\left[\frac{3-2\nu}{1-2\nu}\right]\delta(r_1-r_2),$$

$$V_{20}^{\mu...\nu,t}(r_i, s\to +0) = \frac{T_2^{\mu...\nu,t}}{V<\varepsilon_1^2>}[1+\xi_0^2\nabla^2]\delta(r_1-r_2),$$

где $<\varepsilon_1^2> = V^{-1}\int R_{20\mu\nu}^{\mu\nu,t}(r)dr$, $<\varepsilon_2^2> = V^{-1}\int R_{20\mu\nu}^{\mu\nu,n}(r)dr$ – поперечные и продольные дисперсии флуктуаций полей деформации в состоянии $s\to +0$, $V$ – объем тела.

Можно показать, что в нагруженном состоянии свободные вершины продольных флуктуаций остаются неизменными, а для поперечных принимают вид [1]:

$$V_{20}^{\mu...\nu,t}(r_i, s\to +0) = \frac{T_2^{\mu...\nu,n}}{V<\varepsilon_1^2>}[\theta(s)+\xi_0^2\nabla^2]\delta(r_1-r_2),$$

где $\theta(s) = \dfrac{1}{G}\dfrac{d\tau}{ds}$ – касательный модуль упрочнения вдоль «классической» траектории нормированный на модуль сдвига.

Соответствующие свободные корреляционные функции имеют вид:

$$R_{20}^{\mu...\nu,t}(r,s) = \frac{C_2^{\mu...\nu,t}V<\varepsilon_1^2>}{4\pi r\xi_0^2}e^{-\frac{r}{\xi}},$$

$$R_{20}^{\mu...\nu,n}(r,s) = C_2^{\mu...\nu,n}V<\varepsilon_2^2>\delta(r_1-r_2),$$

где $C_2^{\mu...\nu,t} = \delta^{\mu p}e^q e^\nu$, $C_2^{\mu...\nu,n} = e^\mu e^\mu e^\nu e^\nu$ – единичный вектор в направлении $r$, $\xi = \xi_0\theta^{-1/2}$ – интервал корреляций флуктуаций поперечной деформации.

Дисперсии флуктуаций полей поперечной и продольной деформации выражаются соответственно:

$$< \varepsilon^2(\theta) >= V^{-1}\int R^{\mu\nu,t}_{20\mu\nu}(r,\theta)dr =< \varepsilon_1^2 > \theta^{-1},$$
$$< \varepsilon^2(\theta) >= V^{-1}\int R^{\mu\nu,n}_{20\mu\nu}(r,\theta)dr =< \varepsilon_2^2 >,$$

и, поскольку за исключением узкой области в окрестности макроупругости $\theta << 1$ и $< \varepsilon_1^2 > \approx < \varepsilon_2^2 >$, то $< \varepsilon^2(\theta) > >> < \varepsilon_2^2 >$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением статистики лишь поперечных флуктуаций полей деформации (значок «*t*» опустим). Производящий функционал поперечных флуктуаций может быть получен функциональным интегрированием $W[A_\mu]$ по полю $A_\mu^n$:

$$W[A_\mu^t] = -\ln\int e^{-W[A_\mu^n, A_\mu^t]} dA_\mu^n .$$

Величины $\left\langle \varepsilon_1^2 \right\rangle$ и $\xi_0^{-1}$ будем называть приведенной дисперсией флуктуаций полей деформации и фундаментальным масштабом среды соответственно. Формально они определяются предельным переходом:

$$\left\langle \varepsilon_1^2 \right\rangle = \lim_{\theta\to 1-0} \left\langle \varepsilon^2(\theta) \right\rangle$$
$$\xi_0 = \lim_{\theta\to 1-0} \xi(\theta)$$

и могут быть получены из экспериментов по исследованию статистики полей деформации экстраполяцией в область $s \to +0$ [4, 7]. Континуальной теории упругости и пластичности соответствует предельный переход $\xi_0 \to 0$.

Дальнейший анализ эволюции полных корреляционных функций флуктуаций полей деформации, в частности, установление законов подобия корреляционных радиусов в процессе нагружения, возможен в рамках ренормгруппового анализа [5, 6].

ЛИТЕРАТУРА


1. *Авдеенко А.М.* Критические явления при пластической деформации // Металлофизика. 1990. Т. 2. № 1. С. 7.
2. *Панин В.Е., Дерюгин Е.Е., Деревягин Л.С., Лотков А.И., Суворов Б.И.* Принцип масштабной инвариантности при пластической деформации на микро- и мезомасштабном уровне // ФММ. 1997. 4Т. 84. № 1.
3. *Панин В.Е., Кузнецов П.В., Дерюгин Е.Е., Панин С.В., Елсукова Т.Ф.* Фрактальная размерность мезоструктуры поверхности пластически деформированных материалов // ФММ. 1997. Т. 84. № 2.
4. *Кузько Е.И., Кудря А.В., Стариков С.В.* Бесконтактный автоматический лазерный профилограф для изучения макрогеометрии образцов // Заводская лаборатория. 1992. Т. 58. № 9. С. 63.
5. *Авдеенко А.М.* Скейлинг структурно-неоднородных сред // Изв. АН СССР. Металлы. 1991. С. 64.
6. *Авдеенко А.М., Крупин Ю.А.* Флуктуационная модель потери устойчивости пластического течения высокомодульного композиционного материала Al-SiC // Механика композиционных материалов и конструкций. 1999. № 4.
7. *Авдеенко А.М., Кузько Е.И., Штремель М.А.* Развитие неустойчивости пластического течения как самоорганизация // ФТТ. 1994. № 10. С. 3158.


УДК 541.128; 541.183; 539.89

# ДИНАМИКА ФОРМИРОВАНИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОТПЕЧАТКА ПРИ МИКРОИНДЕНТИРОВАНИИ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

**© В.И. Иволгин, В.В. Коренков, Н.В. Коренкова, О.В. Кутырева, А.И. Тюрин**

*Россия, Тамбов, Государственный университет им. Г.Р. Державина*

Ivolgin V.I., Korenkov V.V., Korenkova N.V., Kutyreva O.V., Tyurin A.I. Real time dynamics of formation and restitution of an impression at micro-indentation. In the operation of a sample PMMA, the kinetics of formation and recovery of an impression is explored. Typical periods of formation of an impression, and also prompt and slow stages of its recovery are spotted. The estimation is carried out of the structural state of a recovered and unreduced impression on the quantity of energy immersed in a checking impulse.

В последнее время в связи с широким применением индентирования для определения разнообразных физико-химических свойств твердых тел, все большее внимание уделяется исследованию физических процессов, сопровождающих процесс формирования отпечатка и его восстановления. Это необходимо как для расширения круга задач, решаемых с его применением, так и целей оценки метрологических характеристик метода.

Следует отметить, что сущность физических процессов, происходящих при внедрении в исследуемый материал жесткого индентора, так же как и непосредственно после снятия с него нагрузки, до сих пор остается во многом неясной. Основной причиной подобного положения являются весьма сложные условия, при которых материал находится под индентором – высокие локальные и неоднородные напряжения при высоких скоростях деформации, что существенно усложняет теоретический анализ ситуации. Следствием этих трудностей является отсутствие надежных методик по исследованию динамики формирования отпечатка и его восстановления в реальном масштабе времени.

Одним из возможных способов решения этих проблем является исследование динамики изменения свойств материала непосредственно в зоне контакта, что позволяет определять ряд констант материала и выявить особенности процесса индентирования.