УДК 517.929

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

© П. М. Симонов, А. С. Ларионов

Ключевые слова: функционально-дифференциального уравнение второго порядка, знак функции Грина.

Статья посвящена актуальной проблеме разрешимости нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений. На основе дифференциального неравенства, являющегося аналогом известного дифференциального неравенства Чаплыгина для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, доказывается теорема о существовании и ограниченности решения краевой задачи для квазилинейного функционально-дифференциального уравнения с последствием. В ходе доказательства исходная краевая задача редуцирована к некоторому операторному уравнению с вполне непрерывным оператором.

Нелинейные краевые задачи для дифференциальных уравнений давно уже являются объектом интенсивного изучения (см., например, обзор [1] или монографию [2]). В основе доказательства разрешимости и построения оценок решений краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений часто лежат теоремы о дифференциальном неравенстве типа теоремы Чаплыгина [3]. Ниже приводится теорема о существовании и ограниченности решения двухточечной краевой задачи для квазилинейного функционально-дифференциального уравнения с последствием.

Будем пользоваться обозначениями: $\mathbb{R}^+ = \{\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0\}$, $W^{(n)}[a, b]$ ($W_\infty^{(n)}[a, b]$), $n = 1, 2$ — пространство функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ с абсолютно непрерывной производной $(n - 1)$ -го порядка, причем $x^{(n)} \in L(L_\infty)$, $n = 1, 2$. Здесь $L = L[a, b]$ — пространство классов суммируемых на $[a, b]$ функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; $L_\infty = L_\infty[a, b]$ — пространство классов функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ измеримых и ограниченных в существенном. Предполагается, что во всех пространствах естественным образом введена полуупорядоченность.

Рассмотрим двухточечную краевую задачу для уравнения

$$\ddot{x}(t) = f(t, \dot{x}(g(t)), x(h(t))), \quad (1)$$

$$\dot{x}(\xi) = 0, x(\xi) = 0, \text{ если } \xi \notin [a, b],$$

с краевыми условиями

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы, $g(t) \leq t$, $h(t) \leq t$ для почти всех $t \in [a, b]$; $f : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Каратеодори.

Обозначим

$$y_r(t) = \begin{cases} y(r(t)), & \text{если } r(t) \in [a, b], \\ 0, & \text{если } r(t) \notin [a, b]. \end{cases}$$

Т е о р е м а. Пусть выполнены условия:

1. Существуют функции $v, z \in W^2[a, b]$, удовлетворяющие неравенствам $v(t) \leq z(t)$,

$$\ddot{v}(t) \geq f(t, \dot{v}_g(t), v_h(t)), \quad \ddot{z}(t) \leq f(t, \dot{z}_g(t), z_h(t)),$$

$$v(a) \leq \alpha \leq z(a), \quad v(b) \leq \beta \leq z(b).$$

2. Существуют суммируемые функции $r_1, r_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такие, что для почти всех $t \in [a, b]$, $c \in [0, +\infty)$ справедливо неравенство

$$f(t, \bar{u}_1, \bar{u}_2) - f(t, u_1, u_2) \leq r_1(c)(\bar{u}_1 - u_1) + r_2(c)(\bar{u}_2 - u_2)$$

всякий раз, когда $-c \leq u_1 \leq \bar{u}_1 \leq c$,

$$\min_{t \in [a, b]} v(t) \leq u_2 \leq \bar{u}_2 \leq \max_{t \in [a, b]} z(t).$$

3. Существует непрерывная возрастающая функция $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что

$$|f(t, u_1, u_2)| \leq \omega(|u_1|), \quad \min_{t \in [a, b]} v(t) \leq u_2 \leq \max_{t \in [a, b]} z(t).$$

4. Существует $\bar{c} > \frac{6\rho}{b-a}$ такое, что для всех $c \geq \bar{c}$ выполняется неравенство

$$\frac{\gamma(c)}{c^2} < \frac{2}{9\rho},$$

где

$$\rho = \max \left\{ \max_{t \in [a, b]} |v(t) - z(t)|, \max_{t \in [a, b]} |v(t)|, \max_{t \in [a, b]} |z(t)| \right\},$$

$$\gamma(c) = \omega(c) + 2cr_1(c) + \rho r_2(c).$$

5. Функция Грина $G(t, s)$ краевой задачи

$$\ddot{x}(t) - r_1(\bar{c})\dot{x}_g(t) - r_2(\bar{c})x_h(t) = \eta(t), \quad (3)$$

$$x(a) = 0, \quad x(b) = 0 \quad (4)$$

неположительна в квадрате $[a, b] \times [a, b]$.

Тогда существует решение x задачи (1), (2), удовлетворяющее неравенствам

$$v(t) \leq x(t) \leq z(t), \quad |\dot{x}(t)| \leq \bar{c}, \quad t \in [a, b].$$

Для доказательства сформулированного утверждения обозначим

$$F_{c, \delta}(t, \dot{x}_g(t), x_h(t)) = f(t, \dot{\delta}_g(t), \delta_h(t)) + r_1(c)(\dot{x}_g(t) - \dot{\delta}_g(t)) + r_2(c)(x_h(t) - \delta_h(t)),$$

где

$$v(t) \leq \delta_h(t) \leq z(t), \quad |\dot{\delta}_g(t)| \leq c, \quad t \in [a, b],$$

и рассмотрим линейную краевую задачу

$$\ddot{x}(t) = F_{c, \delta}(t, \dot{x}_g(t), x_h(t)), \quad t \in [a, b], \quad (3)$$

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Нам понадобится следующая

Л е м м а. Пусть выполнены условия 3 и 4 теоремы. Пусть, далее, $x(t)$ — решение задачи (3), (2), удовлетворяющее неравенствам $v(t) \leq x(t) \leq z(t)$. Тогда $|\dot{x}(t)| \leq \bar{c}$, $t \in [a, b]$.

Доказательство. Пусть $t \in [a, b]$ — точка максимума функции $|\dot{x}(t)|$ и пусть

$$c_0 = |\dot{x}(t_0)| = \max_{t \in [a, b]} |\dot{x}(t)| > \bar{c},$$

где $\bar{c}$ определено в условии 4 теоремы. Выберем действительное число μ так, чтобы

$$|\mu| \leq \frac{b-a}{2}, \quad t_0 + \mu \in [a, b].$$

Тогда

$$x(t_0 + \mu) = x(t_0) + \mu \dot{x}(t_0) + \frac{\mu^2}{2} \ddot{x}(t_0 + \nu\mu),$$

где $0 < \nu < 1$. Отсюда получаем

$$|\mu|c_0 \leq 2\rho + \frac{\mu^2}{2} \left\{ |f(t_0 + \nu\mu, \dot{\delta}_g(t_0 + \nu\mu), \delta_h(t_0 + \nu\mu))| + \right. \\ \left. + r_1(c_0) + |\dot{x}_g(t_0 + \nu\mu) - \dot{\delta}_g(t_0 + \nu\mu)| + r_2(c_0)|x_h(t_0 + \nu\mu) - \delta_h(t_0 + \nu\mu)| \right\}$$

или

$$|\mu|c_0 \leq 2\rho + \frac{\gamma(c_0)}{2} \mu^2.$$

Если μ таково, что $c_0|\mu| = 3\rho$, то последнее неравенство принимает вид

$$\frac{\gamma(c_0)}{c_0^2} \geq \frac{2}{9\rho}.$$

Полученное противоречие показывает справедливость утверждения леммы.

Доказательство теоремы. Для каждого $\delta \in W^1$ такого, что $\delta \in [v, z]$, $|\dot{\delta}| \leq \bar{c}$ определим оператор A равенством

$$(A\delta)(t) = \int_a^b G(t, s)[f(s, \dot{\delta}_g(s), \delta_h(s)) - r_1(\bar{c})\dot{\delta}_g(s) - r_2(\bar{c})\delta_h(s)]ds + \zeta(t),$$

где $\zeta(t)$ — решение задачи

$$\ddot{x}(t) - r_1(\bar{c})\dot{x}_g(t) - r_2(\bar{c})x_h(t) = 0, \quad (4)$$

$$x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta. \quad (2)$$

Так как $r_1(\bar{c}) \geq 0$, $r_2(\bar{c}) \geq 0$, то краевая задача (3), (2) однозначно разрешима и ее единственное решение x имеет вид

$$x(t) = (A\delta)(t).$$

Используя условия 1, 2, 5 теоремы, покажем, что решение задачи (3), (2) удовлетворяет неравенствам

$$v(t) \leq x(t) \leq z(t), \quad t \in [a, b].$$

Действительно,

$$\ddot{x}(t) - \ddot{v}(t) = f(t, \dot{\delta}_g(t), \delta_h(t)) + r_1(\bar{c})(\dot{x}_g(t) - \dot{\delta}_g(t)) + \\ + r_2(\bar{c})(x_h(t) - \delta_h(t)) - f(t, \dot{v}_g(t), v_h(t)) \leq r_1(\bar{c})(\dot{\delta}_g(t) - \dot{v}_g(t)) + \\ + r_2(\bar{c})(\delta_h(t) - v_h(t)) + r_1(\bar{c})(\dot{x}_g(t) - \dot{\delta}_g(t)) + r_2(\bar{c})(x_h(t) - \delta_h(t)) = \\ = r_1(\bar{c})(\dot{x}_g(t) - v_g(t)) + r_2(\bar{c})(x_h(t) - v_h(t)).$$

Обозначив $x - v = \xi$, получим

$$\ddot{\xi}(t) - r_1(\bar{c})\dot{\xi}_g(t) - r_2(\bar{c})\xi_h(t) = \varphi(t) \leq 0,$$

$$\xi(a) \geq 0, \quad \xi(b) \geq 0,$$

откуда следует $\xi \geq 0$, или $v(t) \leq x(t)$, $t \in [a, b]$. Аналогично устанавливается справедливость неравенства $z(t) \geq v(t)$. На основании леммы заключаем, что для производной решения x задачи (3), (2) справедлива оценка $|\dot{x}(t)| \leq \bar{c}$.

Таким образом, оператор A переводит множество

$$\Delta = \left\{ \delta \in W_\infty^1 : \delta \in [v, z], |\dot{\delta}| \leq c \right\}$$

в себя. Представим оператор A в виде $A = GM + \zeta$, где операторы G и M определяются соответственно равенствами

$$(Gy)(t) = \int_a^b G(t, s)y(s)ds,$$

$$(M\delta)(t) = f(t, \dot{\delta}_g(t), \delta_h(t)) - r_1(\bar{c})\dot{\delta}_g(t) - r_2(\bar{c})\delta_h(t),$$

а ζ — решение задачи (4), (2).

Оператор $M : \Delta \rightarrow L_\infty$ непрерывен, а оператор $G : L_\infty \rightarrow W_\infty^2$ ограничен и компактен как оператор из L_∞ в W_∞^1 . Следовательно, оператор $A : \Delta \rightarrow W_\infty^1$ вполне непрерывен. В силу принципа Шаудера существует неподвижная точка оператора A , которая и является решением задачи (1), (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н. В.* Краевые задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Киев: Наукова Думка, 1977. С. 5-11.
2. *Lakshmikantham V., Leela S.* Differential and integral inequalities: Theory and applications. New York: Akad. press, 1969. I. 390 p.
3. *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.;Л.: Гостехиздат, 1950. 102 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и администрации Пермского края (грант № 10-01-96054-р-урал-а), и ЗАО "ПРОГНОЗ".

Поступила в редакцию 05 февраля 2010 г.

Simonov P.M., Larionov A.S. Existence of boundary problem solution for quasilinear functional and differential equation.. The article is devoted an actual problem of solvability of nonlinear boundary value problems for the differential equations. On the basis of the differential inequality, which are analogue of a known differential inequality of Tchaplygin, for the ordinary differential equation of the first order, the theorem of existence and limitation of the solution of a boundary value problem for the quasilinear functional differential equation with aftereffect is proved. During the proof the original boundary value problem is reduced to some operational equation with completely continuous operator.

Key words: functional differential equation of the second order, sign on Green's function.