УДК 517.16

К ВОПРОСУ ОБ УТОЧНЕНИИ НЕРАВЕНСТВА КИ ФАНА

© Л.В. Панкратова

Ключевые слова: среднее арифметическое; среднее геометрическое; среднее гармоническое; неравенство Ки Фана; экстремум функции нескольких переменных.

Работа посвящается рассмотрению одного уточнения неравенства Ки Фана. Приводится полное доказательство полученного результата.

Введение. В теории среднего степенного хорошо известно неравенство

$$H_n \le G_n \le A_n, \tag{1}$$

связывающее среднее гармоническое $H_n = \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i}}$, среднее геометрическое $G_n = \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}$ и среднее арифметическое $A_n = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n}$ положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ ($n \ge 2$). Заметим, что равенство в (1) достигается лишь при условии $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Если числа $a_1, a_2, ..., a_n$ взять из промежутка $\left(0; \dfrac{1}{2}\right]$, то наряду с величинами A_n, G_n и H_n можно ввести аналогичные средние арифметическое A'_n, геометрическое G'_n и гармоническое H'_n последовательности чисел $1-a_1, 1-a_2, ..., 1-a_n$. Для приведенных величин в тематике средних часто рассматривается двойное неравенство

$$\frac{H_n}{H'_n} \le \frac{G_n}{G'_n} \le \frac{A_n}{A'_n}, \tag{2}$$

правое, в котором есть известное неравенство Ки Фана [1, с. 15], а левое принадлежит W.-L. Wang и P.-F. Wang [2]. Вновь отметим, что равенство в (2) возможно только при условии $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Известны различные уточнения неравенства (1). Одним из них является неравенство

$$A_n \cdot H_n^{n-1} \le G_n^n \le A_n^{n-1} \cdot H_n, \tag{3}$$

открытое В. Серпинским (см. [3]). Дальнейшие исследования в отношении неравенств (2) и (3) породили вопрос о справедливости неравенства

$$\frac{A_n \cdot H_n^{n-1}}{A'_n \cdot (H'_n)^{n-1}} \le \left(\frac{G_n}{G'_n}\right)^n \le \frac{A_n^{n-1} \cdot H_n}{(A'_n)^{n-1} \cdot H'_n}. \tag{4}$$

Свою структуру (4) «наследует» у неравенств в (2) и (3). Нетрудно видеть, что правое неравенство в (4) является уточнением неравенства Ки Фана. Настоящую работу мы посвящаем его доказательству.

Вспомогательные утверждения. Приведем некоторые факты, необходимые для доказательства основной теоремы.

Предложение 1 (см. [4], с. 225). *Пусть a и b $(a < b)$ – положительные числа, не превосходящие $\frac{1}{2}$. Тогда для любых положительных чисел q_1, q_2 справедливо неравенство*

$$\left(\frac{a}{1-a}\right)^{q_1} \cdot \left(\frac{b}{1-b}\right)^{q_2} < \left(\frac{q_1 a + q_2 b}{q_1(1-a) + q_2(1-b)}\right)^{q_1+q_2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о Предложения 1 можно найти в [4, с. 226].

Предложение 2. *Последовательность* $\left\{\left(1+\dfrac{m}{n}\right)^n\right\}$ ($m \in \mathbf{N}$), $n \ge 2$, *строго возрастает и* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{m}{n}\right)^n = e^m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a_n = \left(1+\dfrac{m}{n-1}\right)^{n-1}$.

Имеем:

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{m}{n}\right)^n = \left(1+\frac{m}{n}+\frac{m}{n-1}-\frac{m}{n-1}\right)^n =$$

$$= \left(1+\frac{m}{n-1}-\frac{m}{n(n-1)}\right)^n = \left(1+\frac{m}{n-1}\right)^n \left(1-\frac{m}{n(n-1+m)}\right)^n.$$

Оценим последний множитель по неравенству Бернулли $(1+x)^n \geq 1+nx$ ($x > -1, n \in \boldsymbol{N}$). Получим:

$$\left(1-\frac{m}{n(n-1+m)}\right)^n > 1-\frac{m}{n-1+m}\text{, значит,}$$

$$a_{n+1} > \left(1+\frac{m}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1+\frac{m}{n-1}\right) \cdot \left(1-\frac{m}{n-1+m}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{m}{n-1}\right)^{n-1} = a_n$$ (равенство в неравенстве Бернулли возможно лишь при $n=0$ или $n=1$, поэтому наша последовательность возрастает строго). Также нетрудно видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{m}{n}\right)^n = e^m$. Предложение 2 доказано.

Сформулируем основной результат.

Т Е О Р Е М А . *Справедливо неравенство*

$$\left(\frac{G_n}{G_n'}\right)^n \leq \frac{A_n^{n-1} \cdot H_n}{(A_n')^{n-1} \cdot H_n'},$$

причем если $n > 2$, *то равенство в нем возможно лишь при условии* $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, *если же* $n = 2$, *то равенство достигается при любом наборе* a_1, a_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n = 2$. Тогда для любых допустимых значений a_1 и a_2 будет верно

$$A_2 \cdot H_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} = G_2^2 .$$

Пусть теперь $n > 2$. Нетрудно видеть, что устанавливаемое нами неравенство равносильно следующему:

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i}{\sum\limits_{i=1}^n (1-a_i)}\right)^{n-1} \geq \frac{\sum\limits_{j=1}^n \prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n a_i}{\sum\limits_{j=1}^n \prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n (1-a_i)} . \tag{5}$$

Рассмотрим доказательство неравенства (5), основанное на второй теореме Вейерштрасса о непрерывной на компактном множестве функции нескольких переменных и теореме о необходимых условиях экстремума функции нескольких переменных.

Очевидно, (5) обращается в равенство, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Покажем, что если не все числа a_i $(i = 1,\ldots, n)$ равны между собой, то знак неравенства в (5) будет строгим. Последнее будет полностью обосновывать доказываемое соотношение.

Введем в рассмотрение функцию $f : \left[0; \frac{1}{2}\right]^n \to \boldsymbol{R}$, полагая

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^n \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n (1-x_i)\right) - \left(\sum_{i=1}^n (1-x_i)\right)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^n \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n x_i\right). \tag{6}$$

Требуемое будет установлено, если при сделанных предположениях относительно чисел $a_1, a_2,\ldots, a_n$ покажем, что $f(a_1, a_2,\ldots, a_n) > 0$. Функция f непрерывна на множестве $\left[0; \frac{1}{2}\right]^n$, значит, по второй теореме Вейерштрасса она принимает нем свое наименьшее значение. Пусть $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2,\ldots, \tilde{x}_n)$ – точка, для которой $\inf\limits_{[01/2]^n} f = f(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)$. Мы утверждаем, что $\tilde{x}_1 = \ldots = \tilde{x}_n$.

Предположим противное: среди чисел $\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n$ есть различные. Рассмотрим сначала случай, когда $\tilde{x}$ – внутренняя точка множества $\left[0; \frac{1}{2}\right]^n$. Тогда, в силу необходимого условия экстремума для функций нескольких переменных, можем заключить:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{(x_1,\ldots,x_n)=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)} = (n-1)\left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i\right)^{n-2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n (1-\tilde{x}_i)\right) -$$

$$-\left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i\right)^{n-1} \cdot \left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j\\ i\neq k}}^n (1-\tilde{x}_i)\right) +$$

$$+(n-1)\left(\sum_{i=1}^n (1-\tilde{x}_i)\right)^{n-2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n \tilde{x}_i\right) -$$

$$-\left(\sum_{i=1}^n (1-\tilde{x}_i)\right)^{n-1} \cdot \left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j\\ i\neq k}}^n \tilde{x}_i\right) = 0,$$

$k = 1,\ldots, n$.

Отсюда можем сделать вывод, что

$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i\right)^{n-2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n (1-\tilde{x}_i)\right) +$$

$$+(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}(1-\tilde{x}_i)\right)^{n-2}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\tilde{x}_i\right)= \qquad (7)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\right)^{n-1}\cdot\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j\\ i\neq k}}^{n}(1-\tilde{x}_i)\right)+$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n}(1-\tilde{x}_i)\right)^{n-1}\cdot\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j\\ i\neq k}}^{n}\tilde{x}_i\right),\qquad k=1,\dots,n.$$

Так как левая часть (7) не зависит от k, можем записать следующую систему равенств:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\right)^{n-1}\left(\sum_{j=2}^{n}\prod_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{n}(1-\tilde{x}_i)\right)+$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n}(1-\tilde{x}_i)\right)^{n-1}\left(\sum_{j=2}^{n}\prod_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{n}\tilde{x}_i\right)=\dots \qquad (8)$$

$$\dots=\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\right)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1}(1-\tilde{x}_i)\right)+$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n}(1-\tilde{x}_i)\right)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n-1}\tilde{x}_i\right),$$

варьируя значение k в указанных пределах. Рассмотрим, например, равенство первой и последней сумм в (8). Из него можем заключить:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\right)^{n-1}\cdot\left(\left(\prod_{i=2}^{n}(1-\tilde{x}_i)\right)\cdot\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{1-\tilde{x}_i}-\left(\prod_{i=1}^{n-1}(1-\tilde{x}_i)\right)\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1-\tilde{x}_i}\right)=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}(1-\tilde{x}_i)\right)^{n-1}\cdot\left(\left(\prod_{i=2}^{n}\tilde{x}_i\right)\cdot\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\tilde{x}_i}-\left(\prod_{i=1}^{n-1}\tilde{x}_i\right)\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\tilde{x}_i}\right).$$

Получаем:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i\right)^{n-1}\cdot(\tilde{x}_1-\tilde{x}_n)\cdot\left(\prod_{i=2}^{n-1}(1-\tilde{x}_i)\right)\cdot\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{1-\tilde{x}_i}=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}(1-\tilde{x}_i)\right)^{n-1}\cdot(\tilde{x}_1-\tilde{x}_n)\cdot\left(\prod_{i=2}^{n-1}\tilde{x}_i\right)\cdot\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{\tilde{x}_i},$$

что равносильно уравнению

$$(\tilde{x}_1-\tilde{x}_n)\cdot\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^{n}(1-\tilde{x}_i)}\right)^{n-1}-\frac{\left(\prod_{i=2}^{n-1}\tilde{x}_i\right)\cdot\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{\tilde{x}_i}}{\left(\prod_{i=2}^{n-1}(1-\tilde{x}_i)\right)\cdot\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{1-\tilde{x}_i}}\right)=0. \quad (9)$$

Если $n=3$, то из (9) немедленно следует равенство $\tilde{x}_1=\tilde{x}_3$. Поскольку соотношения, аналогичные (9), можем записать и для других компонент точки $\tilde{x}$, то будем иметь $\tilde{x}_1=\tilde{x}_2=\tilde{x}_3$. Это противоречит нашему предположению о том, что среди чисел $\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n$ есть различные.

Пусть теперь $n>3$. Рассмотрим уравнение

$$(\tilde{x}_2-\tilde{x}_n)\cdot\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^{n}(1-\tilde{x}_i)}\right)^{n-1}-\frac{\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n-1}\tilde{x}_i\right)\cdot\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n-1}\frac{1}{\tilde{x}_i}}{\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n-1}(1-\tilde{x}_i)\right)\cdot\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n-1}\frac{1}{1-\tilde{x}_i}}\right)=0, \quad (10)$$

полученное из равенства $\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{(x_1,\dots,x_n)=(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n)}=$ $=\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{(x_1,\dots,x_n)=(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n)}=0$ (т. е. из равенства второй и последней сумм в (8)). Предположим, что в (9) $\tilde{x}_1\neq\tilde{x}_n$. Тогда, очевидно, $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^{n}(1-\tilde{x}_i)}\right)^{n-1}=\frac{\left(\prod_{i=2}^{n-1}\tilde{x}_i\right)\cdot\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{\tilde{x}_i}}{\left(\prod_{i=2}^{n-1}(1-\tilde{x}_i)\right)\cdot\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{1-\tilde{x}_i}}$. Исходя из этого соотношения, нетрудно преобразовать (10) к виду

$$(\tilde{x}_2-\tilde{x}_n)\cdot(\tilde{x}_2-\tilde{x}_1)\cdot\frac{\prod_{i=3}^{n-1}\tilde{x}_i}{\prod_{i=3}^{n-1}(1-\tilde{x}_i)}\times$$

$$\times\frac{SS'+S+S'}{\left(1+(1-\tilde{x}_1)S'\right)\left(1+(1-\tilde{x}_2)S'\right)}=0, \quad (11)$$

где $S=\sum_{i=3}^{n-1}\frac{1}{\tilde{x}_i}$, $S'=\sum_{i=3}^{n-1}\frac{1}{1-\tilde{x}_i}$. Теперь можем заключить, что $\tilde{x}_2=\tilde{x}_n$ или $\tilde{x}_2=\tilde{x}_1$. Рассуждая аналогично, делаем вывод, что все компоненты рассматриваемой точки $\tilde{x}$ можно разделить (без ограничения общности) на два класса: $\tilde{x}_1=\dots=\tilde{x}_k$, $\tilde{x}_{k+1}=\dots=\tilde{x}_n$ ($\tilde{x}_1\neq\tilde{x}_n$, $1\leq k<n$). В таком случае значение иссле-

дуемой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ в точке $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)$ запишется в виде

$$f(\tilde{x})=\left(\frac{k\tilde{x}_1+(n-k)\tilde{x}_n}{k(1-\tilde{x}_1)+(n-k)(1-\tilde{x}_n)}\right)^{n-1}-\left(\frac{\tilde{x}_1}{1-\tilde{x}_1}\right)^{k-1}\times$$

$$\times\left(\frac{\tilde{x}_n}{1-\tilde{x}_n}\right)^{n-k-1}\left(\frac{k\tilde{x}_n+(n-k)\tilde{x}_1}{k(1-\tilde{x}_n)+(n-k)(1-\tilde{x}_1)}\right).$$

Пусть, к примеру, $\tilde{x}_1<\tilde{x}_n$ (случай, когда $\tilde{x}_1>\tilde{x}_n$, рассматривается аналогично). Тогда (см. Предложение 1) будут справедливы неравенства

$$\left(\frac{\tilde{x}_1}{1-\tilde{x}_1}\right)^{k-1}\left(\frac{\frac{k}{n}\tilde{x}_n+\frac{n-k}{n}\tilde{x}_1}{\frac{k}{n}(1-\tilde{x}_n)+\frac{n-k}{n}(1-\tilde{x}_1)}\right)<$$

$$<\left(\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\tilde{x}_1+\frac{1}{n}\tilde{x}_n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)(1-\tilde{x}_1)+\frac{1}{n}\tilde{x}_n}\right)^{k}$$

и

$$\left(\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\tilde{x}_1+\frac{1}{n}\tilde{x}_n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)(1-\tilde{x}_1)+\frac{1}{n}\tilde{x}_n}\right)^{k}\left(\frac{\tilde{x}_n}{1-\tilde{x}_n}\right)^{n-k-1}<$$

$$<\left(\frac{k\tilde{x}_1+(n-k)\tilde{x}_n}{k(1-\tilde{x}_1)+(n-k)(1-\tilde{x}_n)}\right)^{n-1}.$$

Записанные неравенства позволяют сделать вывод, что $f(\tilde{x})>0$. Это противоречит предположению о том, что $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)$ – точка, для которой $\inf\limits_{[0\,1/2]^n} f=f(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)$, поскольку при $\tilde{x}_1=\tilde{x}_n$ функция f обращается в нуль. Итак, случай, когда $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)$ является внутренней точкой множества $\left[0;\frac{1}{2}\right]^n$, невозможен.

Следовательно, $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)$ является граничной точкой этого множества. Здесь возможны следующие варианты: 1) среди компонент точки $\tilde{x}$ есть равные нулю; 2) ни одна из компонент точки $\tilde{x}$ в нуль не обращается. Рассмотрим первый из них.

Пусть $n-k$ $(1\le k\le n-1)$ компонент точки $\tilde{x}$ равны нулю. Без ограничения общности положим

$$0<\tilde{x}_i\le\frac{1}{2},\qquad i=1,\ldots,k;\qquad \tilde{x}_{k+1}=\ldots=\tilde{x}_n=0.$$

Введем в рассмотрение функцию $g:\left[0;\frac{1}{2}\right]^k\to\mathbf{R}$, считая $g(x_1,\ldots,x_k)=f(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$. Исходя из (6), можем записать g в виде

$$g(x_1,\ldots,x_k)=$$

$$=\begin{cases}\left(\sum\limits_{i=1}^{k}x_i\right)^{n-1}\left((n-k)\prod\limits_{i=1}^{k}(1-x_i)+\sum\limits_{j=1}^{k}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{k}(1-x_i)\right), k<n-1,\\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\right)^{n-1}\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n-1}(1-x_i)+\prod\limits_{i=1}^{n-1}(1-x_i)\right)-\left(n-\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\right)^{n-1}\prod\limits_{i=1}^{n-1}x_i, k=n-1.\end{cases}$$

Очевидно, при $k<n-1$ данная функция принимает только положительные значения. Покажем теперь, что g положительна и в случае $k=n-1$. Это утверждение равносильно неравенству

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\right)^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}x_i}>\frac{\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(1-x_i)\right)^{n-1}}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n-1}(1-x_i)\right)\cdot\left(1+\frac{1}{1-x_1}+\ldots+\frac{1}{1-x_{n-1}}\right)}. \qquad (12)$$

Запишем соотношение $\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\right)^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}x_i}\ge\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}(1-x_i)\right)^{n-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(1-x_i)}$, являющееся неравенством Ки Фана для чисел $x_1,\ldots,x_{n-1}$ (см. (2)). В таком случае для доказательства (12) достаточно показать, что

$$1+\frac{1}{1-x_1}+\ldots+\frac{1}{1-x_{n-1}}>\left(1+\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n-1}(1-x_i)}\right)^{n-1}. \qquad (13)$$

Воспользуемся соотношением между средним арифметическим и средним гармоническим чисел $\frac{1}{1-x_1},\ldots,\frac{1}{1-x_{n-1}}$. Тогда, чтобы установить (13), достаточно проверить справедливость неравенства

$$1+(n-1)^2\cdot M>(1+M)^{n-1}, \qquad (14)$$

где $M=\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n-1}(1-x_i)}$. Так как $x_i\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$, $i=1,\ldots,n$, то $M\in\left(\frac{1}{n-1};\frac{2}{n-1}\right]$, значит, верна оценка

$(1+M)^{n-1} \le \left(1+\dfrac{2}{n-1}\right)^{n-1}$. Тогда (см. Предложение 2) $(1+M)^{n-1} < e^2$ для правого неравенства в (14). Левое же неравенство в (14) несложно оценить снизу: $1+(n-1)^2 \cdot M > 1+(n-1)^2 \cdot \dfrac{1}{n-1}$. Таким образом, для всех значений $n > 7$ имеем: $1+(n-1)^2 \cdot M > n > e^2 > (1+M)^{n-1}$.

Для проверки оставшихся значений n ($n = 3,4,5,6,7$) рассмотрим функцию $\tilde{g}(M) = 1+ +(n-1)^2 \cdot M - (1+M)^{n-1}$, где $M \in \left(\dfrac{1}{n-1}; \dfrac{2}{n-1}\right]$, и для каждого из n оценим наименьшее значение этой функции на соответствующем промежутке. Найдем производную функции $\tilde{g}(M)$: $\tilde{g}'(M) = (n-1) \times \times \left(n-1-(1+M)^{n-2}\right)$. Поскольку первый множитель в записи производной положителен, произведем оценку второго множителя:

1) $n = 3 \Rightarrow n-1-(1+M)^{n-2} =$

$$= 2-(1+M) \ge 2-\left(1+\frac{2}{2}\right) = 0;$$

2) $n = 4 \Rightarrow n-1-(1+M)^{n-2} =$

$$+3-(1+M)^2 \ge 3-\left(1+\frac{2}{3}\right)^2 > 0;$$

3) $n = 5 \Rightarrow n-1-(1+M)^{n-2} =$

$$= 4-(1+M)^3 \ge 4-\left(1+\frac{2}{4}\right)^3 > 0;$$

4) $n = 6 \Rightarrow n-1-(1+M)^{n-2} =$

$$= 5-(1+M)^4 \ge 5-\left(1+\frac{2}{5}\right)^4 > 0;$$

5) $n = 7 \Rightarrow n-1-(1+M)^{n-2} =$

$$= 6-(1+M)^5 \ge 6-\left(1+\frac{2}{6}\right)^5 > 0.$$

Итак, функция $\tilde{g}(M)$ на всяком промежутке $\left(\dfrac{1}{n-1}; \dfrac{2}{n-1}\right]$, где $n = 3,4,5,6,7$, является неубывающей. Оценим ее значение на левом конце соответствующего промежутка (хотя при $M = \dfrac{1}{n-1}$ функция $\tilde{g}(M)$ не задана, можем доопределить ее в этой точке значением предела $\lim\limits_{M \to \frac{1}{n-1}+0} \tilde{g}(M)$, поэтому такая оценка корректна). Так как $\tilde{g}\left(\dfrac{1}{n-1}\right) = n - \left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}$, где $n \ge 3$, а в силу Предложения 2 справедливо неравенство $\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e$, то $\tilde{g}\left(\dfrac{1}{n-1}\right) > 0$. Стало быть, $\tilde{g}(M)$ на любом промежутке $\left(\dfrac{1}{n-1}; \dfrac{2}{n-1}\right]$ ($n = 3,4,5,6,7$) строго положительна, и неравенство (14) доказано. Итак, функция $g(x_1,...,x_k)$ принимает только положительные значения. Последнее противоречит тому, что точка $\tilde{x}$ есть точка инфимума функции f на множестве $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]^n$. Следовательно, ни одна из компонент точки $\tilde{x}$ не обращается в нуль, т. е. для этой точки возможен лишь второй описанный выше вариант.

Пусть теперь k $(1 \le k \le n-1)$ компонент точки $\tilde{x}$ отличны от $\dfrac{1}{2}$, а $n-k$ равны $\dfrac{1}{2}$. Без ограничения общности будем считать

$$0 < x_i < \frac{1}{2}, \quad i = 1,...,k; \quad \tilde{x}_{k+1} = ... = \tilde{x}_n = \frac{1}{2}.$$

Введем в рассмотрение функцию $h: \left[0; \dfrac{1}{2}\right]^k \to \boldsymbol{R}$, полагая $h(x_1,...,x_k) = f\left(x_1,...,x_k, \dfrac{1}{2},..., \dfrac{1}{2}\right)$. Точка $(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_k)$ есть внутренняя точка множества $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]^k$, нетрудно видеть, что она является точкой инфимума функции h. В силу необходимого условия экстремума функции нескольких переменных заключаем, что $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(x_1,...,x_k)=(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_k)} = 0$, $i = 1,...,k$. Поскольку структура частных производных функций f и h одинакова, то, рассуждая по аналогии со случаем, когда $(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n)$ – внутренняя точка множества $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]^n$, заключаем, что $\tilde{x}_1 = ... = \tilde{x}_k = x_0$. Рассмотрим функцию $H(x) = h(x,...,x)$ и покажем, что при $x \in \left(0 \dfrac{1}{2}\right)$ будет выполняться неравенство $H(x) > 0$. Так как

$$H(x) = \left(kx + \frac{n-k}{2}\right)^{n-1} \times$$

$$\times \left(k(1-x)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} + (n-k)(1-x)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1}\right) -$$

$$-\left(k(1-x) + \frac{n-k}{2}\right)^{n-1} \times,$$

$$\times\left(kx^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}+(n-k)x^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1}\right)$$

достаточно показать справедливость неравенства

$$\left(\frac{kx+\dfrac{n-k}{2}}{k(1-x)+\dfrac{n-k}{2}}\right)^{n-1}>$$

$$>\left(\frac{x}{1-x}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}\right)^{n-k-1}\cdot\left(\frac{\dfrac{k}{2}+(n-k)x}{\dfrac{k}{2}+(n-k)(1-x)}\right).$$

В силу Предложения 1 оно вытекает из соотношений

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{\dfrac{k}{2n}+\left(1-\dfrac{k}{n}\right)x}{\dfrac{k}{2n}+\left(1-\dfrac{k}{n}\right)(1-x)}\right)<$$

$$<\left(\frac{\dfrac{1}{2n}+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)x}{\dfrac{1}{2n}+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)(1-x)}\right)^{k}$$

и

$$\left(\frac{\dfrac{1}{2n}+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)x}{\dfrac{1}{2n}+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)(1-x)}\right)^{k}\cdot\left(\frac{\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}\right)^{n-k-1}<$$

$$<\left(\frac{kx+\dfrac{n-k}{2}}{k(1-x)+\dfrac{n-k}{2}}\right)^{n-1}.$$

Таким образом, $H(x)>0$ при $x\in\left(0\frac{1}{2}\right)$. Отсюда, в частности, заключаем, что $H(x_0)>0$. Последнее противоречит тому, что $\inf\limits_{[01/2]^n} f = f(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n)$, следовательно, должно выполняться условие $\tilde{x}_1=...=\tilde{x}_n$. Это полностью обосновывает теорему, поскольку в предположениях относительно чисел $a_1,a_2,...,a_n$ должно выполняться неравенство $f(a_1,a_2,...,a_n)>0$. Итак, теорема полностью доказана.

Для полноты проведенного исследования отметим следующее.

З а м е ч а н и е 1. Принципиально иной способ доказательства рассмотренного неравенства $\left(\frac{G_n}{G'_n}\right)^n\le\frac{A_n^{n-1}\cdot H_n}{(A'_n)^{n-1}\cdot H'_n}$ можно найти в статье Х. Альцера [5].

З а м е ч а н и е 2. Неравенство

$$(A'_n)^{n-1}\cdot H'_n-A_n^{n-1}\cdot H_n\le(G'_n)^n-G_n^n, \qquad (15)$$

называемое аддитивным аналогом неравенства (4), неверно. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить его для набора чисел $a_1=a_2=\frac{1}{4},a_3=\frac{1}{2}$.

З а м е ч а н и е 3. Вопрос о справедливости неравенства

$$\frac{A_n\cdot H_n^{n-1}}{A'_n\cdot(H'_n)^{n-1}}\le\left(\frac{G_n}{G'_n}\right)^n,$$

которое можно рассматривать как уточнение неравенства W.-L. Wang и P.-F. Wang (см. (2)), пока остается открытым.

Надеемся, что тема работы и предложенный метод исследования вызовут интерес определенного круга читателей. Это приведет к дальнейшему развитию теории среднего степенного и ее приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beckenbach E.F., Bellman R.* Inequalities. Berlin: Springer, 1961.
2. *Wang W.L., Wang P.F.* A class of inequalities for the symmetric functions (Chinese) // Acta Math. Sinica. 1984. V. 27. P. 485-497.
3. *Sierpinski W.* Sur une inegalité pour la moyenne arithmétique, géométrique et harmonique // Warszawa Sitzungsber. 1909. № 2. C. 354-357.
4. *Калинин С.И.* Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана: учеб. пособие по спецкурсу. Киров: Изд-во ВГГУ, 2002. 368 с.
5. *Alzer H.* Verschärfung einer Ungleichung von Ky Fan // Aequationes Mathematicae. 1988. № 36. S. 246-250.

Поступила в редакцию 2 апреля 2011 г.

Pankratova L.V. TO THE QUESTION OF IMPROVEMENT OF KY FAN INEQUALITY

The article is devoted to review of one improvement of Ky Fan inequality. The complete proof of this result is represented.

Key words: arithmetic mean; geometric mean; harmonic mean; Ky Fan inequality; extremum of the function of several variables.