ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ПРОСТРАНСТВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА СФЕРЕ

© А.В.Опимах

Пусть $K = \mathrm{SO}(p)$ – ортогональная группа матриц порядка p с определителем 1. Мы будем считать, что K линейно действует в $\mathbb{R}^p$ справа: $x \mapsto xk$, в соответствии с этим будем писать вектор в виде строки. Пусть $Q = x_1^2 + ... + x_p^2$ и пусть S обозначает сферу $Q = 1$. Для многообразия M обозначим через $\Lambda^1(M)$ пространство дифференциальных форм на M первого порядка с гладкими коэффициентами. Пусть $\pi^{(1)}$ – представление группы K сдвигами в пространстве $\Lambda^1(S)$. Наша цель – разложить это представление на неприводимые, см. теорему 2 ниже. Мы будем считать, что $p \geqslant 4$. Случай $p = 3$ был рассмотрен нами ранее, см. [2], он имеет некоторые отличия от общего случая. Случай $p = 4$ несколько более подробно рассмотрен в работе [3].

Известно [1], что представление $\pi^{(0)}$ группы K сдвигами в пространстве $C^\infty(S)$ функций на S разлагается в прямую однократную сумму неприводимых представлений π_l, $l \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, со старшим весом $(l, 0, ..., 0)$. Пусть H_l – пространство однородных гармонических многочленов в $\mathbb{R}^p$ степени l. Представление π_l – это представление группы K сдвигами в H_l, оно же эквивалентно действует и в пространстве $H_l(S)$ ограничений многочленов из H_l на S.

Сначала рассмотрим представление $U^{(1)}$ группы K сдвигами в $\Lambda^1(\mathbb{R}^p)$. Оно есть прямая сумма представлений $\pi_l \otimes \pi_1$, $l \in \mathbb{N}$, действующих в пространствах $H_l \otimes dH_1$, здесь d – дифференциал, dH_1 имеет базис $dx_1, ..., dx_p$. Представление $\pi_l \otimes \pi_1$ разлагается так, см. [4]:

$$\pi_l \otimes \pi_1 = \pi_{l-1} + \pi_{l,1} + \pi_{l+1}, \quad p > 4, \tag{1}$$

$$\pi_l \otimes \pi_1 = \pi_{l-1} + \pi_{l,1} + \pi_{l,-1} + \pi_{l+1}, \quad p = 4, \tag{2}$$

здесь $\pi_{l,\varepsilon}$ – неприводимое представление со старшим весом $(l, \varepsilon, 0, ..., 0)$.

Алгебра Ли $\mathfrak{k}$ группы K имеет своим базисом матрицы $L_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, $i < j$, где E_{ij} – матричная единица (1 на месте (i, j), 0 на остальных). Ранг алгебры $\mathfrak{k}$ равен $[p/2]$ (целая часть). В качестве картановской подалгебры возьмем подалгебру $\mathfrak{a}$ с базисом $L_{2k-1,2k}$, $k = 1, ..., [p/2]$. Положительная корневая подалгебра $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ натянута на элементы

$$E^{\pm}_{k,m} \doteq \frac{1}{2}\Big\{L_{2k-1,2m-1} + iL_{2k-1,2m} \pm i(L_{2k-1,2m} + iL_{2k,2m})\Big\}$$

– при четном p, а при нечетном p надо к ним добавить $E_k = L_{2k-1,p} + iL_{2k,p}$.

Укажем старшие векторы (формы, аннулируемые подалгеброй $\mathfrak{n}$) в правых частях (1) и (2). Для (1) – это, соответственно, формы

$$(x_1 + ix_2)^{l-1} dQ, \tag{3}$$

$$(x_1 + ix_2)^{l-1}\Big\{(x_3 + ix_4)(dx_1 + idx_2) - (x_1 + ix_2)(dx_3 + idx_4)\Big\}, \tag{4}$$

$$d\Big\{(x_1 + ix_2)^{l+1}\Big\}, \tag{5}$$

для (2) первый и последний вектор – те же самые, а для $\pi_{l,\pm 1}$ надо в (4) взять $\pm x_4$ вместо x_4.

Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Представление $U^{(1)}$ группы K сдвигами в пространстве $\Lambda^1(\mathbb{R}^p)$ разлагается в прямую сумму неприводимых представлений π_l, $l \geqslant 0$, $\pi_{l,1}$, $l \geqslant 1$ – для $p > 4$ и π_l, $l \geqslant 0$, $\pi_{l,\pm 1}$, $l \geqslant 1$ – для $p = 4$. Кратности представлений π_0, $\pi_{l,1}$ и $\pi_{l,\pm 1}$ равны 1, кратности представлений π_l, $l \geqslant 1$, равны 2. Старшие векторы неприводимых представлений указаны выше, см. (3), (4), (5). Представления π_l действуют в пространствах $H_l dQ$ и dH_l.*

Представление $\pi^{(1)}$ получается из $U^{(1)}$ при ограничении форм из $\Lambda^1(\mathbb{R}^p)$ на сферу S. Поскольку на сфере S мы имеем $Q = 1$ и, стало быть, $dQ = 0$, серия представлений π_l, $l \geqslant 0$, действующих в $H_l dQ$, исчезает. Мы получаем

Т е о р е м а 2. *Представление $\pi^{(1)}$ группы K сдвигами в $\Lambda^1(S)$ разлагается в прямую однократную сумму неприводимых представлений π_l, $\pi_{l,1}$ для $p > 4$ и π_l, $\pi_{l,\pm 1}$ для $p = 4$. Здесь $l \geqslant 1$. Старшие векторы указаны в (4) и (5), (в (5) надо заменить $l+1$ на l).*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
2. *Опимах А.В.* Гармонический анализ в дифференциальных формах на сфере// Вестник Тамбовского ун-та, 2002, том 7, вып. 1, 57–58.
3. *Опимах А.В.* Разложения пространств дифференциальных форм первого порядка на сфере в $\mathbb{R}^4$ (см. настоящий том).
4. *Levine D.* Systems of singular integrals on spheres // Trans. Amer. Math. Soc., 1969, vol. 144, 493–522.

РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА СФЕРЕ В $\mathbb{R}^4$

© А.В.Опимах

В работе [1] мы разложили представление $\pi^{(1)}$ группы $\mathrm{SO}(p)$ сдвигами в пространстве $\Lambda^1(S)$ дифференциальных форм первого порядка на сфере S в $\mathbb{R}^p$ для $p \geqslant 4$. В настоящей работе мы даем некоторую дополнительную информацию для $p = 4$, (вообще, случай $p = 4$ несколько отличается от $p > 4$).

Напомним [1], что представление $\pi^{(1)}$ разлагается в прямую однократную сумму неприводимых представлений π_l и $\pi_{l,\pm 1}$, $l = 1, 2, 3, ...$, группы $K = \mathrm{SO}(4)$. Размерности представлений π_l и $\pi_{l,\pm 1}$ равны, соответственно, $(l+1)^2$ и $l^2 + 2l$.

Вместо переменных x_1, x_2, x_3, x_4 в $\mathbb{R}^4$ нам удобно ввести переменные $u = x_1 + ix_2, \overline{u} = x_1 - ix_2, v = x_3 + ix_4, \overline{v} = x_3 - ix_4$.

Базис алгебры Ли $\mathfrak{k}$ группы K состоит из шести матриц $L_{km} = E_{km} - E_{mk}, 1 \leqslant k < m \leqslant 4$, E_{km} – матричная единица. Возьмем в $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ картановскую подалгебру с базисом $L = -iL_{12}$, $M = -iL_{34}$. Корневыми векторами служат элементы

$$E_\pm = \frac{1}{2}\Big(L_{13} + iL_{23} \pm i(L_{14} + iL_{24})\Big),$$

$$F_\pm = \frac{1}{2}\Big(L_{13} - iL_{23} \mp i(L_{14} - iL_{24})\Big).$$

Положительным корням отвечают $E_\pm$. Напишем соответствующие операторы Ли:

$$L = u\frac{\partial}{\partial u} - \overline{u}\frac{\partial}{\partial \overline{u}}, \quad M = v\frac{\partial}{\partial v} - \overline{v}\frac{\partial}{\partial \overline{v}},$$

$$E_+ = -v\frac{\partial}{\partial \overline{u}} + u\frac{\partial}{\partial \overline{v}}, \quad E_- = -\overline{v}\frac{\partial}{\partial \overline{u}} + u\frac{\partial}{\partial v},$$

$$F_+ = -\overline{v}\frac{\partial}{\partial u} + \overline{u}\frac{\partial}{\partial v}, \quad F_- = -v\frac{\partial}{\partial u} + \overline{u}\frac{\partial}{\partial \overline{v}}.$$

Старшими векторами (аннулируемыми $E_\pm$) для π_l, $\pi_{l,1}$, $\pi_{l,-1}$ является соответственно формы:

$$e_l = u^{l-1}du, \; f_l = u^{l-1}vdu - u^l dv, \; f_l^- = u^{l-1}\overline{v}du - u^l d\overline{v}.$$

Для исследования представлений группы $\mathrm{SO}_0(1,4)$, см. [2], надо знать, как действуют операторы $\partial/\partial v - \partial/\partial \overline{v} = -i\partial/\partial x_4$ и $v - \overline{v}$ (умножение на $v - \overline{v} = 2ix_4$) на формы из пространства представления $\pi_{l,\pm 1}$ (оператор $\partial/\partial v - \partial/\partial \overline{v}$ понимается в следующем смысле: сначала применяем его к соответствующим формам в $\mathbb{R}^4$, а затем берем ограничение на S). Эти операторы коммутируют с подгруппой $K' = \mathrm{SO}(3)$, сохраняющей x_4, следовательно, сохраняют подпространства, инвариантные относительно K'. Пусть π'_m