УДК 517.928.4

О СЛАБО ВЫРОЖДАЮЩЕМСЯ ЛИНЕЙНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© В.И. Фомин

Fomin V.I. On a weakly degenerated linear differential equation of the first order with the constant bounded operator coefficient in the Banach space. The article analyses the application of the singular differential equation with a weakly degenerated coefficient.

В банаховом пространстве E рассматривается уравнение

$$t^{\alpha}x'(t) = Ax(t) + f(t), 0 < t < \infty, \tag{1}$$

где $A \in L(\mathrm{E}), f(t) \in C([0,\infty);\mathrm{E}), \alpha \in (0,\infty)$.

Уравнение (1) может иметь как ограниченные, так и неограниченные в точке вырождения $t = 0$ решения; кроме того, в случае ограниченности решения $x(t)$ при $t \to +0$ его производная $x'(t)$ может быть неограничена при $t \to +0$. Проиллюстрируем вышесказанное на примере скалярного уравнения: решение $x(t) = t - 1$ уравнения $t\,x'(t) = x(t) + 1$ и его производная $x'(t) = 1$ ограничены при $t \to +0$; решение $x(t) = 1 + \frac{1}{t}$ уравнения $t\,x'(t) = -x(t) + 1$ и его производная $x'(t) = -\frac{1}{t^2}$ неограничены при $t \to +0$; решение $x(t) = \sqrt{t}$ уравнения $\sqrt{t}x'(t) = x(t) - \sqrt{t} + 0{,}5$ ограничено при $t \to +0$, а его производная $x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ неограничена при $t \to +0$.

Для нахождения ограниченных в точке вырождения решений уравнения (1) рассмотрим задачу вида:

$$\begin{cases} t^{\alpha}x'(t) = Ax(t) + f(t), 0 < t < \infty, & (2)\\ \lim\limits_{t\to+0} x(t) = x_0, x_0 \in E. & (3)\end{cases}$$

Т е о р е м а. В случае слабой вырождаемости уравнения (1), т. е. при $0 < \alpha < 1$ задача (2), (3) имеет решение

$$x(t) = \exp(A\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha})x_0 + \int_0^t \exp(A\frac{t^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha})\frac{f(s)}{s^{\alpha}}ds. \tag{4}$$

Если $\nu = \max\{\operatorname{Re}\lambda | \lambda \in \sigma(A)\} < 0$ и $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то решение (4) ограничено на $[0,\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заменой.

$$t = [(1-\alpha)\tau]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

уравнение (2) сводится к уравнению без вырождения:

$$u'(\tau) = Au(\tau) + g(\tau),\ 0 < \tau < \infty,$$

где $u(\tau) ::= x([(1-\alpha)\tau]^{\frac{1}{1-\alpha}})$, $g(\tau) ::= f([(1-\alpha)\tau]^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} u'(\tau) = Au(\tau) + g(\tau), 0 \le \tau < \infty, & (5)\\ u(0) = x_0. & (6)\end{cases}$$

Известно [1], что задача (5), (6) имеет решение

$$u(\tau) = \exp(A\tau)x_0 + \int_0^{\tau} \exp[A(\tau - \rho)]g(\rho)d\rho.$$

Возвращаясь при $0 < \tau < \infty$ к переменной t, получаем формулу (4). Используя непрерывность решения $u(\tau)$, имеем:

$$\lim_{t\to+0} x(t) = \lim_{\tau\to+0} u(\tau) = u(0) = x_0,$$

т. е. решение (4) уравнения (2) удовлетворяет начальному условию (3). Оценим (4) по норме:

$$\|x(t)\| \le \left\|\exp(A\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha})\right\| \cdot \|x_0\| + \int_0^t \left\|\exp(A\frac{t^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha})\right\| \frac{\|f(s)\|}{s^{\alpha}}ds. \tag{7}$$

Из (7) и оценки вида

$$\|\exp(At)\| \le M\exp(\nu_{\delta}t), 0 \le t < \infty,$$

где $M > 0, \nu_\delta = \nu + \delta, \delta$ – произвольное сколь угодно малое положительное число, получаем:

$$\|x(t)\| \le M \exp(\frac{\nu_\delta}{1-\alpha} t^{1-\alpha}) \cdot \|x_0\| + \\ + M \cdot N(t) \cdot \int \exp(\nu_\delta \frac{t^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha}) \frac{ds}{s^\alpha}, \quad (8)$$

где $N(t) = \max\limits_{0 \le s \le t} \|f(s)\|$. Заметим, что

$$\int_0^t \exp(\nu_\delta \frac{t^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha}) \frac{ds}{s^\alpha} = \frac{1}{-\nu_\delta} \exp(\nu_\delta \frac{t^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha}) \Bigg|_0^t = \\ = \frac{1}{-\nu_\delta} [1 - \exp(\frac{\nu_\delta}{1-\alpha} t^{1-\alpha})]. \quad (9)$$

В силу (8), (9)

$$\|x(t)\| \le M \exp(\frac{\nu_\delta}{1-\alpha} t^{1-\alpha}) \cdot \|x_0\| + \\ + \frac{M}{-\nu_\delta} N(t) [1 - \exp(\frac{\nu_\delta}{1-\alpha} t^{1-\alpha})]. \quad (10)$$

Если $\nu < 0$, то за счет выбора δ можно считать, что $\nu_\delta < 0$. Тогда в силу (10)

$$\|x(t)\| \le M \cdot \|x_0\| + \frac{M}{-\nu_\delta} N(t), 0 < t < \infty. \quad (11)$$

Из (11) видно, что если $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то решение (4) ограничено на $[0, \infty)$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если $f(t) \equiv f, 0 \le t < \infty$; $f \in R(A)$ и оператор A обратим, то решение (4) можно записать в виде

$$x(t) = -A^{-1} f + \exp(A \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha})(x_0 + A^{-1} f). \quad (12)$$

Действительно, в этом случае

$$\int_0^t \exp(A \frac{t^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha}) \frac{f}{s^\alpha} ds = \left| \mu = \frac{t^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right| = \int_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \exp(A\mu) f d\mu =$$

$$= \int_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \exp(A\mu) A(A^{-1} f) d\mu = \int_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} A \exp(A\mu)(A^{-1} f) d\mu =$$

$$= \int_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} [\exp(A\mu)(A^{-1} f)]' d\mu = \exp(A\mu)(A^{-1} f) \Bigg|_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} =$$

$$= \exp(A \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha})(A^{-1} f) - A^{-1} f.$$

Получили:

$$\int_0^t \exp(A \frac{t^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha}) \frac{f}{s^\alpha} ds = \\ = -A^{-1} f + \exp(A \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha})(A^{-1} f). \quad (13)$$

В силу (13) решение (4) принимает вид (12).

З а м е ч а н и е 2. Если $f(t) \equiv f, 0 \le t < \infty$; $f \in R(A)$ и оператор A обратим, то задача (2), (3) с начальным значением $x_0 = -A^{-1} f$ имеет стационарное решение $x(t) = -A^{-1} f$. Формула (12) известна [2].

В случае сильной вырождаемости уравнения (1), т. е. при $\alpha \ge 1$ его ограниченные в точке вырождения решения найдены методом малых стабилизирующих возмущений в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. С. 105.
2. *Фомин В.И.* Малые стабилизирующие возмущения вырождающегося линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянным ограниченным операторным коэффициентом и постоянным свободным членом // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 1999. Т. 4. Вып. 3. С. 347-352.
3. *Фомин В.И.* Малые стабилизирующие возмущения вырождающегося линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянным ограниченным операторным коэффициентом и переменным свободным членом // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2000. Т. 5. Вып. 1. С. 80-82.

Поступила в редакцию 2 ноября 2002 г.