УДК 519.17

ВЫДЕЛЕНИЕ, ГЕНЕРАЦИЯ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ СЕМЕЙСТВ ТРАНЗИТИВНЫХ ГРАФОВ СТЕПЕНИ 4 ПО ХАРАКТЕРИСТИКАМ СИММЕТРИИ И СТРУКТУРНОЙ СЛОЖНОСТИ

© Ю.В. Старичкова, А.А. Незнанов

Ключевые слова: транзитивный граф; семейство; симметрия; структурная сложность; визуализация; генерация.

Рассматривается задача классификации семейств связных транзитивных графов степени 4 (ТГС4) на основе характеристик симметрии (строения группы автоморфизмов) и информации обо всех ТГС4 с числом вершин до 30. Предлагается один из вариантов классификации и конкретные бесконечные и конечные семейства, покрывающие все ТГС4 до 30 вершин, с возможностью расширения состава семейств с ростом числа вершин ТГС4. Построен генератор бесконечных и конечных семейств на основе данной классификации, позволяющий строить представителей семейств ТГС4 с заданными характеристиками симметрии и выбором симметричной визуализации их диаграмм.

ВВЕДЕНИЕ

Класс *транзитивных графов* (ТГ), т. е. графов, в которых все вершины принадлежат одной орбите и эквивалентны по своим свойствам, играет особую роль, как теоретическую, так и в многочисленных приложениях. С теоретической точки зрения актуальны задачи конструктивного перечисления и классификации ТГ [1, 2], что необходимо для развития смежных разделов дискретной математики. Практически значимы – анализ, синтез ТГ с необходимыми характеристиками и визуализация, ставящиеся при исследовании топологий вычислительных сетей, химических реакций, строения кристаллов, предельной связности, надежности и инвариантных преобразований гомогенных систем, кодировании данных и т. п. [3, 4]. Данные задачи удобнее всего решать, выделив бесконечные семейства с требуемыми свойствами. Основой выделения семейств являются характеристики симметрии, структурной сложности и прорисовки диаграмм.

Уточним задачу классификации ТГ, сузив исследуемый класс до *связных транзитивных графов степени* 4 (ТГС4). Этот класс широко используется на практике, т. к., например, предлагает удачный компромисс между уровнями структурной надежности и структурной сложности (в первую очередь выражаемой числом ребер). При этом, в отличие транзитивных графов степени 3, ТГС4 исследованы недостаточно.

Целью классификации является выделение (по некоторому набору критериев) из класса ТГС4 семейств подобных графов с растущим числом вершин. Исходными данными является полная база ТГС4 до 30 вершин включительно и информация о строении ГАГ [5]. Результат классификации – определение принадлежности каждого ТГС4 до 30 вершин только к одному семейству и построение генераторов выделенных семейств. Общее число семейств – 59 бесконечных и 72 конечных, причем с ростом числа вершин ТГС4 появляются новые семейства, как полученные параметризацией уже выделенных, так и абсолютно новых.

Данная работа основана на результатах, ранее полученных H.P. Yap, B.D. McKay, G.F. Praeger и C.E. Royle (1973–1998 гг.), В.А. Коховым (1985–2004 гг.), А.А. Незнановым и О.В. Киричек (2002–2004 гг.) и др.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Базовые понятия теории графов и теории групп можно найти в [1, 2, 6]. Приведем используемые далее термины.

Пусть $G = (V, E)$ обозначает обыкновенный граф, где идентификаторами (номерами) вершин и ребер выступают числа натурального ряда: $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} = \{1, \ldots, p\}$, $p = |V|$ – число вершин; и $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_q\} = \{1, \ldots, q\}$, $q = |E|$ – число ребер. Пусть $Aut(G)$ обозначает *группу автоморфизмов графа* G (ГАГ), а $|Aut(G)|$ – порядок группы.

Определение 1. *Фиксатор (стабилизатор) вершины* $v \in V$ – подгруппа $Aut(G, v)$, оставляющая неподвижной вершину v, т. е.

$$Aut(G,v) = \{g \in Aut(G) : g(v) = v\}\cdot$$

Определение 2. *Фиксатор подмножества вершин* $V^0 \subseteq V$ – подгруппа $Aut(G, V^0)$, оставляющая неподвижной каждую вершину множества V^0, т. е.

$$Aut(G,V^0) = \bigcap_{v \in V^0} Aut(G,v)\cdot$$

Определение 3. *Стабилизатор подмножества вершин* $V^1 \subseteq V$ – подгруппа $Aut[G, V^1]$, оставляющая множество V^1 неподвижным, т. е.

$$Aut[G,V^1] = \{g \in Aut(G) : \forall v \in V^1 [g(v) \in V^1]\}\cdot$$

Определение 4. *Орбита вершины* $v \in V$ – подмножество $\Theta(Aut(G), v)$ вершин графа G, которые могут быть отображены на вершину v:

$$\Theta(Aut(G),v) = \{v' : [\exists g \in Aut(G) : g(v') = v]\}\cdot$$

Определение 5. Граф называется *транзитивным*, если все его вершины принадлежат одной орбите.

Определение 6. *Орбита вершины* $v \in V$ *относительно фиксатора* $Aut(G, V^0)$ – подмножество $\Theta(Aut(G, V^0), v)$ вершин графа G, которые могут быть отображены на вершину v при условии фиксации подмножества $V^0 \subset V$:

$$\Theta(Aut(G,V^0),v)=\{v':[\exists g\in Aut(G,V^0):g(v')=v]\}\cdot$$

Определение 7. *Орбита вершины* $v \in V$ *относительно стабилизатора* $Aut[G, V^1]$ – подмножество $\Theta(Aut[G, V^1], v)$ вершин графа G, которые могут быть отображены на вершину v при условии стабилизации подмножества $V^1 \subset V$:

$$\Theta(Aut[G,V^1],v)=\{v':[\exists g\in Aut[G,V^1]:g(v')=v]\}\cdot$$

Определение 8. Подмножество вершин $V^- \subset V$ называется *экстремальным подмножеством нетождественной стабильности* графа, если справедливо

$$(Aut(G,V^-)\not\approx E_p)\,\&\,(\forall v\in V\setminus V^-:Aut(G,V^-\cup\{v\})\approx E_p),$$

где E_p – тождественный автоморфизм.

Определение 9. Подмножество вершин $V^+ \subset V$ называется *экстремальным подмножеством тождественной стабильности* графа, если справедливо $(Aut(G,V^+)\approx E_p)\,\&\,(\forall v\in V^+:Aut(G,V^+\setminus\{v\})\not\approx E_p)$.

Определение 10. Пусть Π^- и Π^+ обозначают соответственно множество всех подмножеств V^- и V^+ вершин графа G. Тогда $\psi=\min\limits_{V^+\in\Pi^+}\left|V^+\right|$ – *число тождественной стабильности* графа, а $\chi=\max\limits_{V^-\in\Pi^-}\left|V^-\right|$ – *число нетождественной стабильности* графа.

Определение 11. *Цикловой индекс* ГАГ – многочлен от переменных $z_1, z_2, \ldots, z_p$, определяемый формулой

$$Z(Aut(G))=\frac{1}{|Aut(G)|}\sum_{g\in Aut(G)}\prod_{k=1}^{p}z_k^{j_k(g)},$$

где через $j_k(g)$ обозначено число циклов длины $k = 1, \ldots, p$ в разложении автоморфизма $g \in Aut(G)$ в произведение непересекающихся циклов.

Определение 12. *Числом тождественности* $t(G)$ графа G называется минимальное число новых вершин, необходимых для построения тождественного надграфа OG графа G, т. е.

$$t(G)=\min_{Aut(OG)\approx E_p}(\left|V_{OG}\right|-\left|V_G\right|)\cdot$$

Определение 13. *Прорисовкой* диаграммы графа назовем получение одного из визуальных образов графа на плоскости. Мы будем рассматривать симметричные диаграммы ТГС4, т. е. диаграммы, хотя бы частично отражающие симметрию графа. *Вариантами прорисовки* ТГС4 назовем получение диаграмм, существенно отличающихся по расположению вершин и ребер графа относительно осей симметрии. Наиболее популярными вариантами прорисовок транзитивных графов являются прорисовки с расположением вершин по нескольким окружностям с центром в одной и той же точке.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ЭКСКУРС

Рассмотрим историю развития и достигнутые результаты по перечислению и исследованию транзитивных графов. Перечисление ТГ – одна из самых интересных подзадач перечисления регулярных топологий. Исследование ТГ неразрывно связано с исследованиями по теории групп.

Систематическое исследование транзитивных графов началось еще в середине XX века [7]. Важной вехой стало создание каталогов конструктивно-перечисленных классов ТГ [8]. Однако, например, в первой существенной попытке перечислить все ТГ до 12 вершин H.P. Yap пропустил 3 графа. Серьезные результаты по конструктивному перечислению ТГ, претендующие на универсальность подхода и подкрепленные алгоритмическими разработками, были получены с 1978 по 1995 г. и отражены в работах B.D. McKay, G.F. Praeger и C.E. Royle [9–10]. На данный момент в каталоге ТГ перечислены все структуры с числом вершин до 31. Используемые методы перечисления ТГ связаны с вычислением ГАГ. Для обработки ГАГ относительно небольших графов существуют хотя и переборные, но эффективные с практической точки зрения алгоритмы. Отметим, что знание строения ГАГ позволяет намного эффективнее решать другие переборные задачи анализа графов.

Перейдем к задаче классификации ТГС4. Для ее решения была использована информация о характеристиках этого класса графов, полученная В.А. Коховым и А.А. Незнановым [5] и опирающаяся на предшествующие работы В.А. Кохова (1988–1994 гг.) [6], А.А. Незнанова (2001–2004 гг.) и О.В. Киричек (2003–2004 гг.). Используемая база ТГС4 с числом вершин до 30 содержит 289 графов.

Следует отметить, что в работе, выполненной ранее О.В. Киричек и А.А. Незнановым, присутствовал ряд проблем, не позволяющих говорить о полной завершенности созданного программного комплекса, в частности:

– неполнота классификации (не все графы, содержащиеся в базе, могли быть классифицированы, как представители одного из семейств, предложенных в работе);

– избыточная сложность классификации (подклассы, которые целесообразно объединять в один класс, были выведены в роли отдельных классов);

– некоторые изоморфные графы были отнесены в различные семейства, таким образом, формально отличаясь друг от друга.

Работа по улучшению классификации ТГ была начата в 2005 г. В ходе работы постоянно уточнялась классификация ТГ по критериям: порядок группы автоморфизмов; число тождественной стабильности; число нетождественной стабильности; структура орбит фиксатора вершины; цикловой индекс; внешний вид диаграммы графа (основной эстетический критерий выделения семейства). В 2008 г. были приведены первые результаты полной классификации ТГС4 [11] до 30 вершин включительно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЕМЕЙСТВ И КЛАССИФИКАЦИЯ ТГС4 НА ОСНОВЕ СИММЕТРИИ И СЛОЖНОСТИ

Подход к классификации ТГС4

Подход к классификации основан на характеристиках симметрии и визуальных образах графов.

Определение 14. *Семейство* – последовательность (конечная или бесконечная) подобных по некоторым характеристикам графов с возрастающим числом вершин, для которых определена процедура построения следующего представителя последовательности по предыдущему.

Следующие критерии будут определять принадлежность графа семейству и выбор первого уникального графа.

1. Одна из симметричных диаграмм графа. Отметим, что число симметричных прорисовок одного транзитивного графа может быть очень велико, поэтому дополнительным критерием выбора прорисовки диаграмм первых представителей семейства является эстетичность. Выбранная прорисовка называется канонической для семейства.

2. Порядок группы автоморфизмов ($|Aut(G)|$), числа тождественной (ψ) и нетождественной (χ) стабильности. Одним из признаков принадлежности нескольких графов к одному семейству является идентичность значений $|Aut(G)|$, ψ и χ либо возможность их объединения одной формулой.

3. Сравнение строения группы автоморфизмов членов семейств. Строение ГАГ для семейства должно оставаться идентичным или изменяться по одним и тем же правилам. В качестве начального критерия используем структуру орбит фиксатора вершины. Уточнение производится по цикловым индексам ГАГ.

Пример информации о семействе G_68 приведен в табл. 1, где *n* обозначает порядок группы предыдущего представителя семейства, а *m* – число нетождественной стабильности предыдущего представителя семейства.

Отметим, что кроме канонической прорисовки, которая является основной для конкретного семейства, при генерации представителей возможен выбор других прорисовок (от 0 до 40 вариантов в зависимости от семейства).

Система классификации семейств ТГС4

Классифицируем методы построения и приведем статистику количества семейств. При этом используем следующие переменные:

– *i* – текущая вершина. Для графов с прорисовкой по одной окружности нумерация ведется по этой окружности;

– *k*, *l*, *s* – переменные, используемые для указания смежности вершин.

Все переменные задают номера вершин в соответствии с их расположением на окружности.

Далее приведена (табл. 2–6) классификация семейств транзитивных графов в соответствии с выбранными каноническими диаграммами. Отметим, что используемая нумерация семейств согласует данную классификацию с другими системами синтеза, не рассматриваемыми в данной работе.

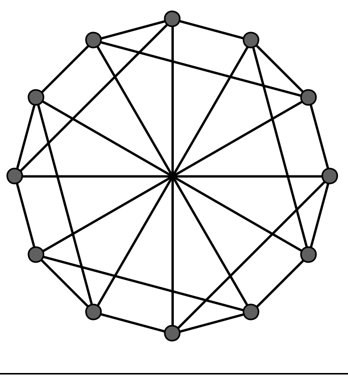
Таблица 1

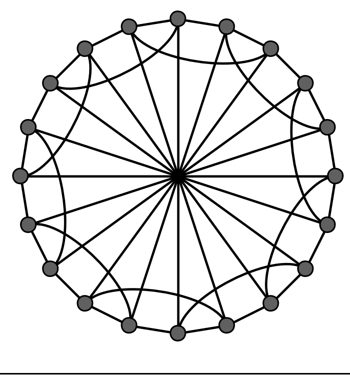
Пример информации о семействе

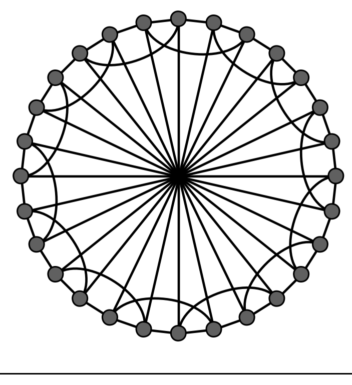
Название: G_68						
FV	*UV*	*SV*	ψ	χ	$\|Aut(G_1)\|$	$\|Aut(G)\|$
12	12	8	2	$m + 4$	48	$n + 32$

Ранее конструктивно перечисленные представители даются по каталогу [5]: 12-4-1, 20-4-16, 28-4-21

Диаграммы при канонической прорисовке:



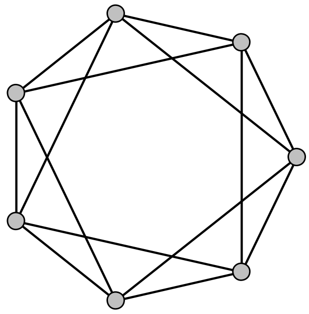
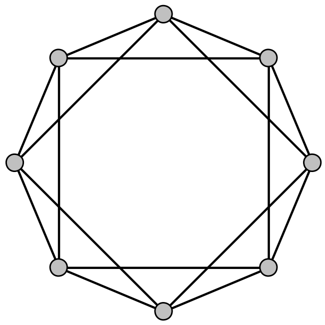
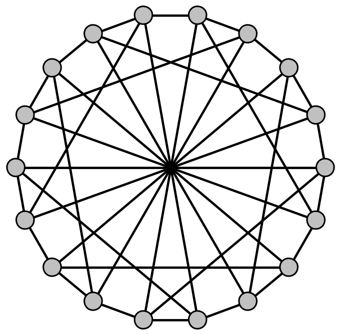
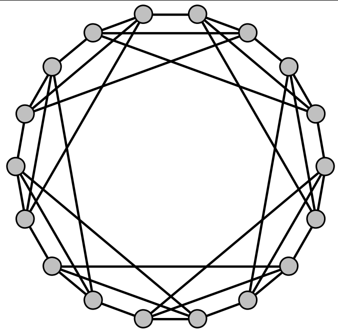
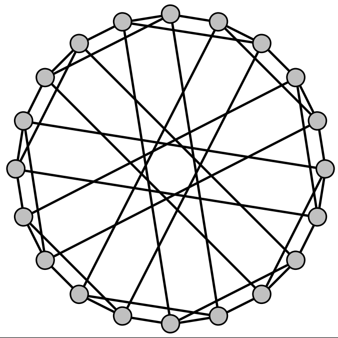




Обозначения к таблице 1: *FV* – число вершин в первом графе семейства; *UV* – число вершин в первом уникальном представителе семейства, начиная с которого и для каждого следующего графа характеристики симметрии совпадают; *FN* – число вершин последнего графа в семействе, если оно конечное (в табл. 1 отсутствует, т. к. семейство бесконечно); *SV* – шаг числа вершин (разность числа вершин между *i* и (*i*–1) графами); ψ – число тождественной стабильности; χ – число нетождественной стабильности; $|Aut(G)|$ – число симметрии (порядок группы автоморфизмов); *n* – порядок группы предыдущего представителя семейства; *m* – число нетождественной стабильности предыдущего представителя семейства.

Таблица 2

Вершины расположены на одной окружности, соседние вершины смежны.
Подклассы определяются расположением остальных ребер

1.1. p – нечетное, SV – четное, смежными также являются вершины $(i, i + k),(i + p - k)$, где $k \in [2, (p + 1)/2]$. 11 семейств: G_1, G_2, G_5, G_6, G_7, G_102, G_107, G_108, G_119, G_209, G_230 Класс может быть расширен	
1.2. p – четное, SV – четное, смежными также являются вершины $(i, i + k),(i + p - k)$, где $k \in [2, p/2 - 1]$. 14 семейств: G_11, G_12, G_13, G_14, G_15, G_16, G_17, G_18, G_20, G_103, G_210, G_211, G_231, G_239 Класс может быть расширен	
1.3. Смежными также являются вершины $(i, p/2 - i)$, $(i, i + p + k)$. 7 семейств: G_21, G_22, G_25, G_68, G_78, G_214, G_215 Класс может быть расширен	
1.4. Смежными также являются ребра $(i, i + k)$, $(i + k, i + p + s)$ 4 семейств: G_33, G_219, G_237, G_238	
1.5. Смежными также являются ребра $(i, i + k)$, $(i + k, i + p - l + s)$ 4 семейства: G_26, G_27, G_28, G_35	

Окончание таблицы 2

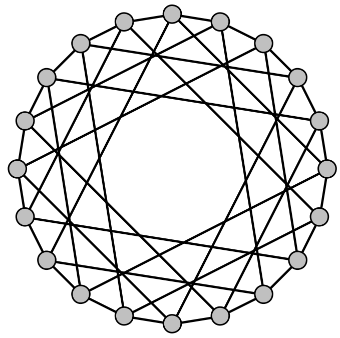
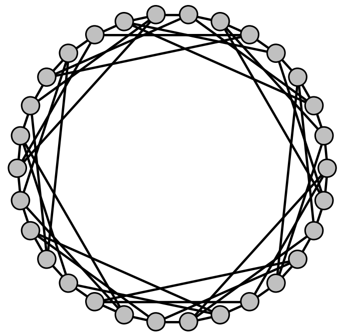
1.6. Смежными также являются ребра $(i, i+k)$, $(i+k, i+p-l)$ 10 семейств: G_29, G_30, G_36, G_37, G_38, G_74, G_117, G_217, G_220, G_233	
1.7. Смежными также являются ребра $(i, i+k)$, $(i+k, i+2k)$, $(i+2k, i+p+l)$ 1 семейство: G_203	

Таблица 3

Графы, вершины которых расположены на одной окружности и соседние несмежны

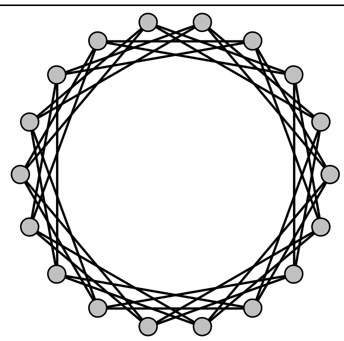
Смежными являются ребра $(i, i+k)$, $(i, i+l)$. 4 семейства: G_42,G_125, G_221, G_222 Класс может быть расширен	

Таблица 4

Графы, вершины которых расположены по нескольким окружностям

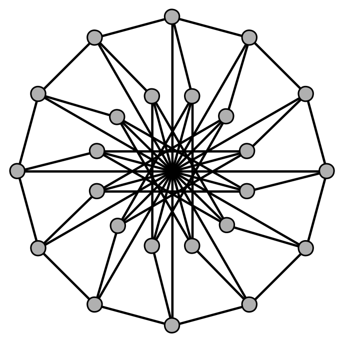
Графы, вершины которых добавляются на две окружности и соединяются между собой в зависимость от строения семейства. 1 семейство: G_56	

Таблица 5

Графы, прорисовка которых представляет каркас тора

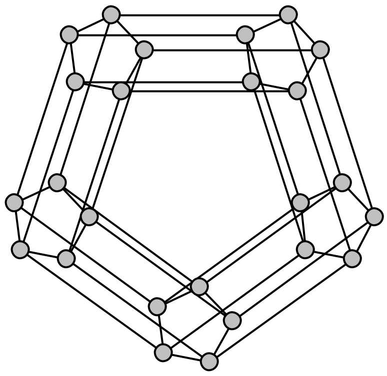
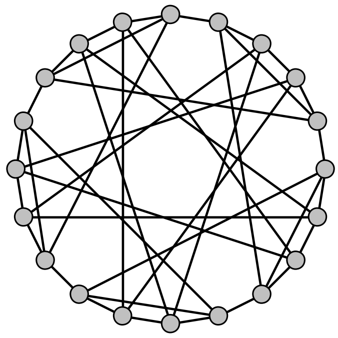
3 семейства: G_10001 - G_10003 Класс может быть расширен (параметр – число сечений)	

Таблица 6

Семейства с конечным числом вершин

72 семейства: G_1001 – G_1004, G_1006 – G_1027, G_1029 – G_1074	

Корректность и полнота классификации

Корректность классификации. Все представители семейств являются ТГ. Это доказано как вычислительным экспериментом (первые 50 представителей каждого семейства), так и сравнением строения группы автоморфизмов семейств с известными группами и тем, что структура группы сохраняется неизменной у всех представителей. Для конечных семейств достроен последний представитель и подтверждено путем проверки строения группы автоморфизмов, что он является единственным или последним представителем, имеющим одну орбиту. Отметим, что выделение некоторых семейств и выбор варианта канонической прорисовки неоднозначен и во многом определяется взглядами на эстетичность и выразительность диаграмм.

Полнота классификации. Невозможно утверждать, что не существует ТГС4, не принадлежащих выделенным семействам. Однако вычислительным экспериментом подтверждена частичная полнота классификации, смысл которой в том, что все полученные семейства покрывают известные ТГС4 до 30 вершин. Более того, данная классификация семейств безызбыточна, т. к. при генерации представителей семейств, начиная с первого уникального, мы получаем все ТГС4 до 30 вершин без повторений.

Лес семейств ТГС4. Для обеспечения и проверки уникальности представителей семейств среди всех ТГС4 построен лес семейств. Его основное дерево имеет корнем клику на 5 вершинах. Каждая развилка в лесе обозначает порождение нового семейства с выделением первого уникального представителя семейства. Лес покрывает все ТГС4 до 30 вершин включительно, т. е. в нем 289 вершин.

Бесконечные семейства образуют подграф из 194 вершин. Остальные вершины обозначают конечные семейства. Интересно, что некоторые графы малого размера не попали в основной лес бесконечных семейств. Например, из двух графов на 8 вершинах один входит в дерево с корнем в клике на 5 вершинах, а второй расположен отдельно. Это обусловлено требованием безызбыточности семейств.

Сам лес семейств реализован в виде интерактивной графовой модели. На рис. 1 и рис. 2 представлены различные варианты ее визуализации.

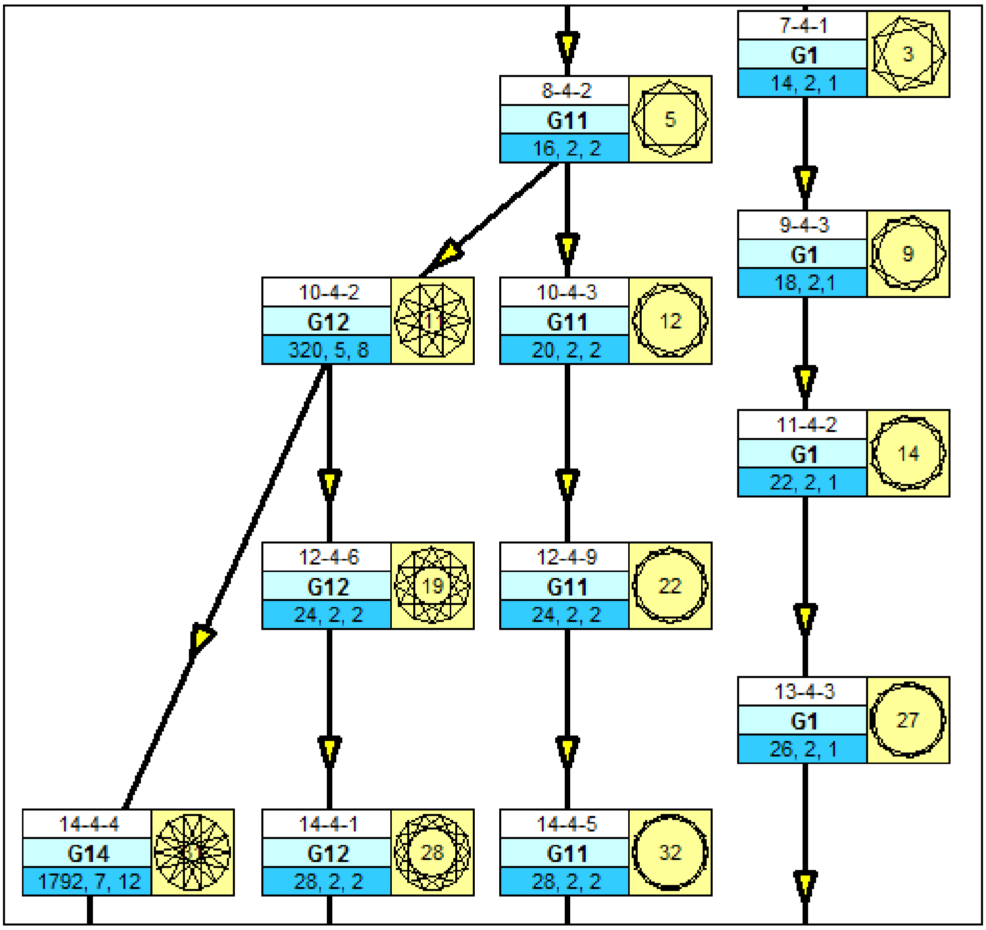


Рис. 1. Фрагмент леса семейств (порождение семейств G_12 и G_14)

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СТРУКТУРНОЙ СЛОЖНОСТИ И СИММЕТРИИ СЕМЕЙСТВ ТГС4

Входные данные. Для проведения экспериментов были сгенерированы базы, содержащие по 50 первых представителей для каждого из 59 бесконечных семейств ТГС4 (всего 2950 графов).

Эксперимент по анализу характеристик симметрии. Цель эксперимента: проверить принадлежность представителей семейств, полученных путем классификации базы ТГС4 до 30 вершин.

Суть эксперимента: экспериментально проверить принадлежность генерируемых семейств к классу ТГС4, выявить зависимость характеристик симметрии предыдущего и следующего представителя, уточнить первый уникальный граф для каждого семейства.

С использованием программы поиска ГАГ А.А. Незнанова (основанной на работе B.D. McKay [12]) представители семейств были проверены на принадлежность к классу ТГС4, а также подтверждены их характеристики симметрии.

Эксперимент по анализу характеристик структурной сложности. Цель эксперимента: определить значения индексов структурной сложности в различных базисах структурных дескрипторов для выделенных семейств ТГС4, выявить взаимозависимости значений индексов и определить экстремальные значения индексов сложности среди исследуемых семейств.

Суть эксперимента: вычисление различных индексов структурной сложности, в основном, структурной спектральной сложности в различных базисах [13]. В результате исследования проведено 22 вычислительных эксперимента, обработано, общее время вычислений – более 300 часов.

Проиллюстрируем полученные результаты. В табл. 7 приведены семейства ТГС4 (*G*_1, *G*_25, *G*_56, *G*_68, *G*_71, *G*_74, *G*_203), используемые в качестве показательных примеров.

На рис. 3–7 приведены примеры графиков зависимости значений индексов структурной сложности и порядка ГАГ от числа вершин для выбранных семейств.

Отметим, что стабилизация фрагментарного состава для циклов происходит только после 50 вершин. Возможно, изменение леса семейств позволило бы улучшить поведение подобных графиков, но текущий вариант указания первых уникальных представителей семейств является компромиссом между различными критериями качества.

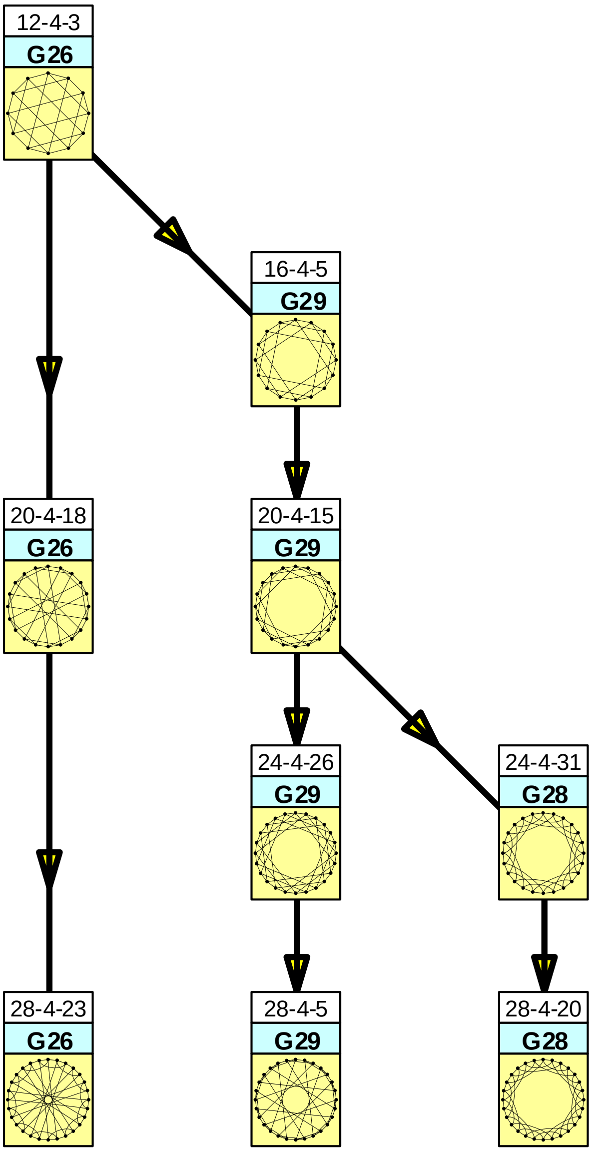


Рис. 2. Фрагмент леса семейств (порождение семейств G_28 и G_9)

Отметим, что спектральная сложность семейств в разных базисах по-разному коррелирует с характеристиками симметрии. Семейство *G*_25, представители которого имеют наибольший (с огромным отрывом) порядок ГАГ, отстает от других семейств по числу фрагментов (цепей, циклов и деревьев малых длин).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе ранее достигнутых результатов анализа симметрии и структурной сложности транзитивных графов предложен метод классификации семейств связных транзитивных графов степени 4. На его основе получены бесконечные и конечные семейства ТГС4 с заданными характеристиками. Все известные представители ТГС4 до 30 вершин включительно покрываются выделенными семействами, для которых разработаны программные средства генерации и визуализации (прорисовки симметричных диаграмм). Всего выделено 59 бесконечных семейств и 72 конечных семейства ТГС4, для каждого семейства найден его *первой уникальный представитель*, не входящий в иные семейства, для обеспечения *безызбыточной генерации* ТГС4.

Доказана частичная полнота (в смысле порождения всех ТГС4 до 30 вершины) и корректность предложенной классификации. Проведены вычислительные эксперименты по анализу различных характеристик симметрии и по исследованию структурной сложности семейств ТГС4 с использованием различных моделей сложности в различных базисах структурных дескрипторов, включая цепи, циклы, деревья. Все полученные результаты отражены в каталоге семейств ТГС4.

Текущие исследования связаны с расширением системы классификации семейств ТГ других степеней (в первую очередь степени 5) и рассмотрением других практически важных характеристик ТГ (например, параметров структурной надежности).

Таблица 7

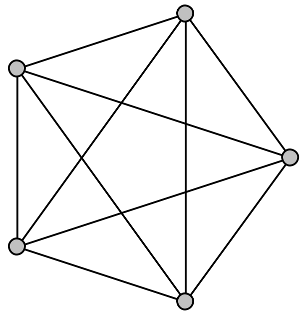
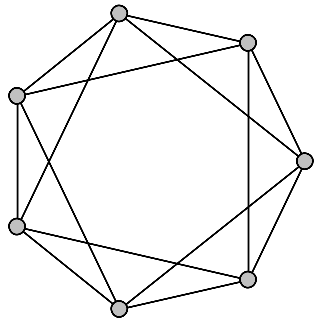
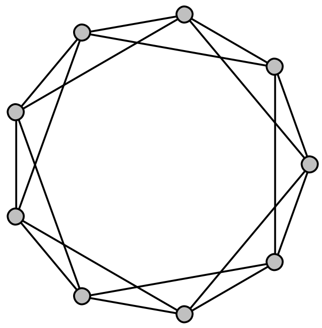
Информация о выбранных семействах

Название: G_1

FV	UV	SV	ψ	χ	$\|Aut(G_1)\|$	$\|Aut(G)\|$
5	7	2	2	1	14	$n + 4$

Известные ранее представители даются по каталогу [5]: 5-4-1, 7-4-1, 9-4-3, 11-4-2, 13-4-3, 15-4-7, 17-4-4, 19-4-4, 21-4-10, 23-4-5, 25-4-8, 27-4-13, 29-4-7

Диаграммы:

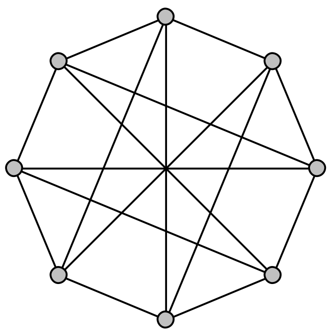
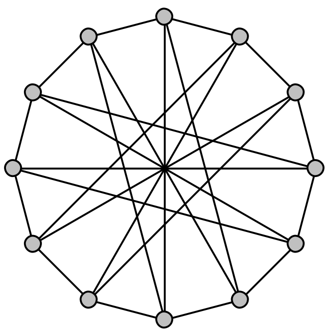
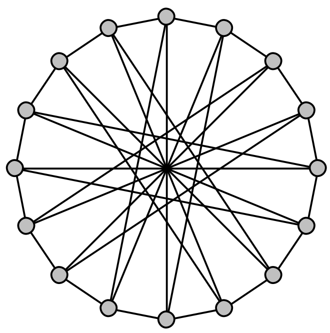




Название: G_25

FV	UV	SV	ψ	χ	$\|Aut(G_1)\|$	$\|Aut(G)\|$
8	12	4	$n + 1$	$n + 4$	48	$n_{i-1}*2 + 16*2^{i-1}$

Известные ранее представители даются по каталогу [5]: 8-4-3, 12-4-10, 16-4-13, 20-4-24, 24-4-60, 28-4-28.

Диаграммы:

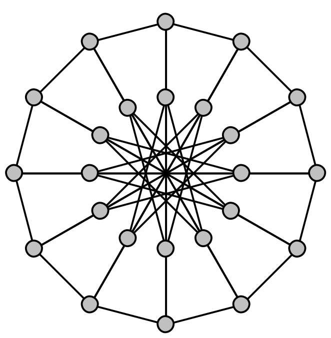
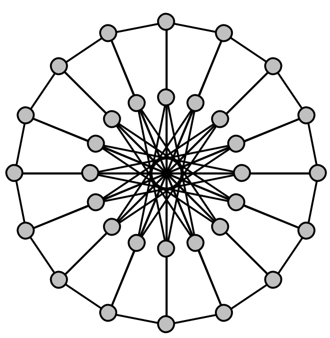
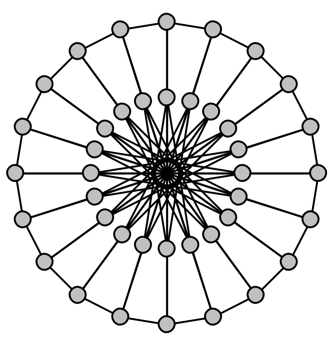




Название: G_56

FV	UV	SV	ψ	χ	$\|Aut(G_1)\|$	$\|Aut(G)\|$
24	24	8	2	4	48	$n + 16$

Известные ранее представители даются по каталогу [5]: 24-4-23.

Диаграммы:

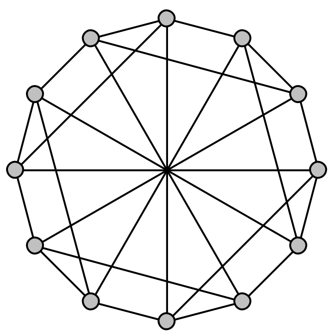
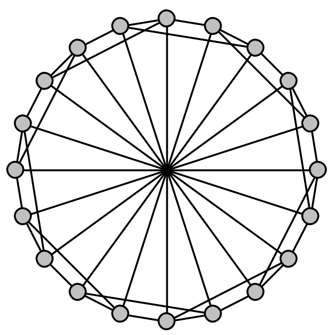
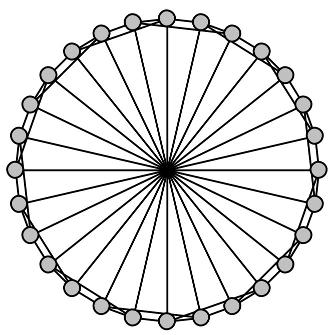
Окончание таблицы 7

Название: G_68

FV	UV	SV	ψ	χ	$\|Aut(G_1)\|$	$\|Aut(G)\|$
12	12	8	2	$m + 4$	48	$n + 32$

Известные ранее представители даются по каталогу [5]: 12-4-1, 20-4-16, 28-4-21

Диаграммы:

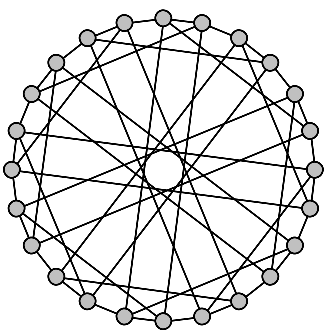
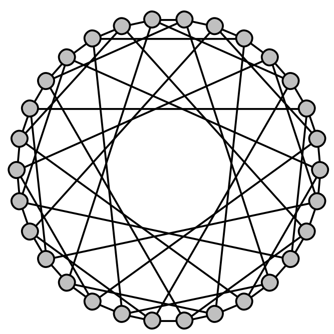
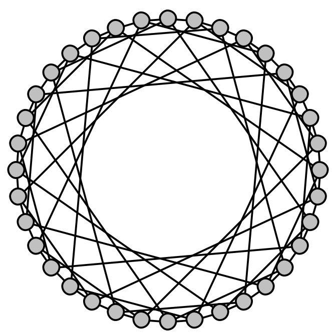




Название: G_74

FV	UV	SV	ψ	χ	$\|Aut(G_1)\|$	$\|Aut(G)\|$
24	48	6	1	0	48	$n + 48$

Известные ранее представители даются по каталогу [5]: 24-4-3, 30-4-2

Диаграммы:

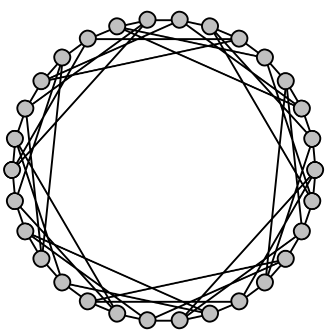
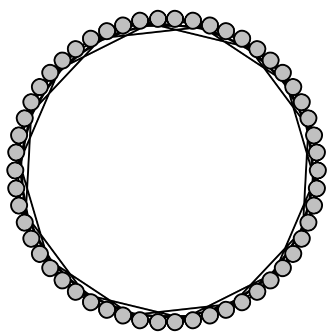
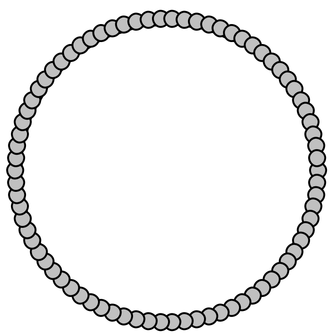




Название: G_203

FV	UV	SV	ψ	χ	$\|Aut(G_1)\|$	$\|Aut(G)\|$
30	30	24	2	$m_1 = 10$, $m + 8$	120	$n + 96$

Известные ранее представители даются по каталогу [5]: 30-4-24

Диаграммы:

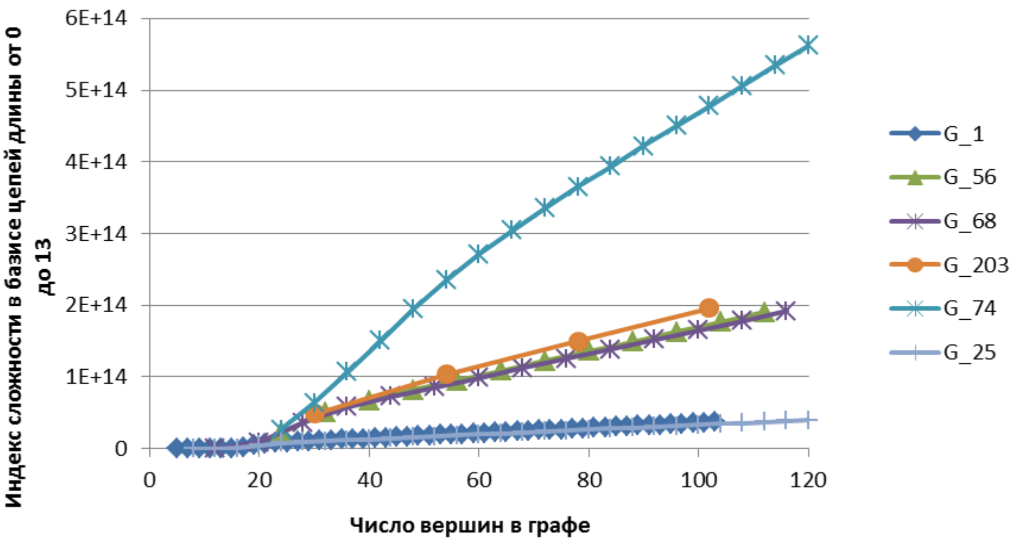


Рис. 3. График зависимости значений индексов сложности в базисе цепей длины от 0 до 13 от числа вершин в графе

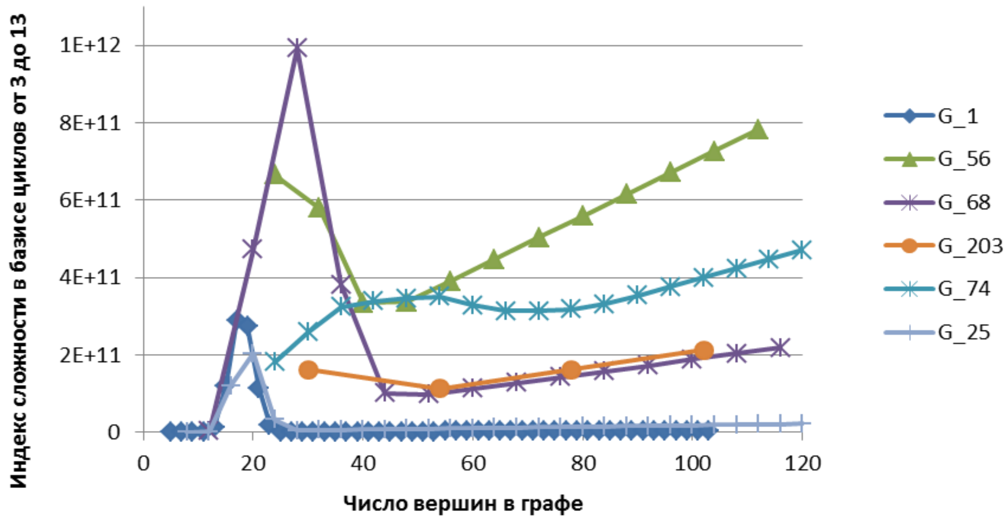


Рис. 4. График зависимости значений индексов сложности в базисе циклов длины от 2 до 13 от числа вершин в графе

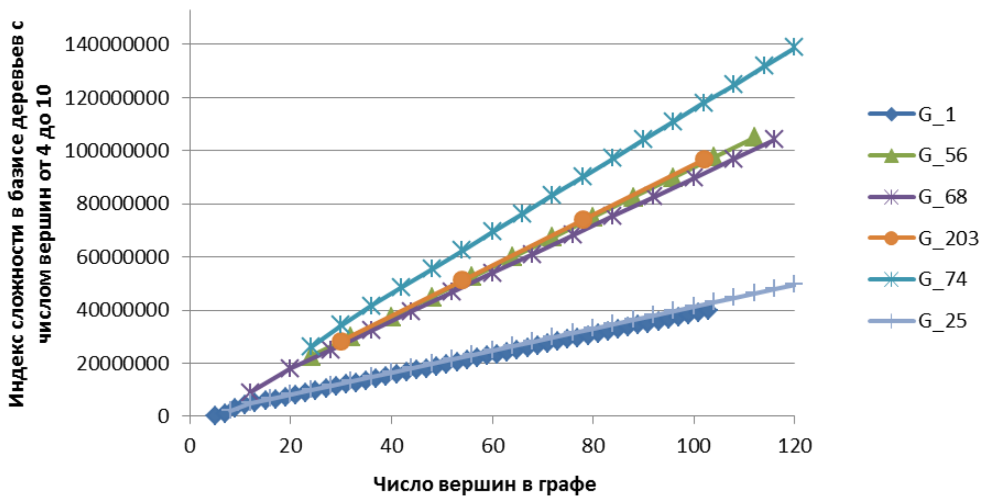


Рис. 5. График зависимости значений индексов сложности в базисе деревьев с числом вершин от 4 до 10 от числа вершин в графе

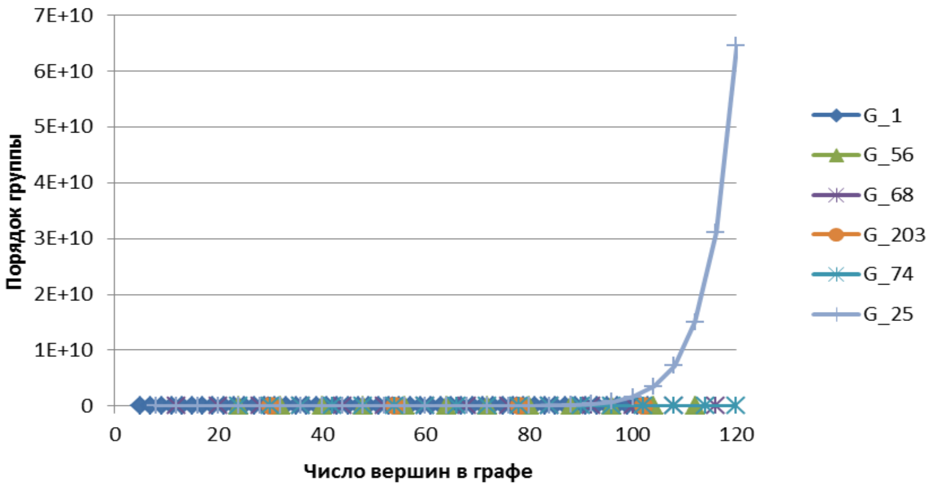


Рис. 6. График зависимости значений характеристик симметрии от числа вершин в графе

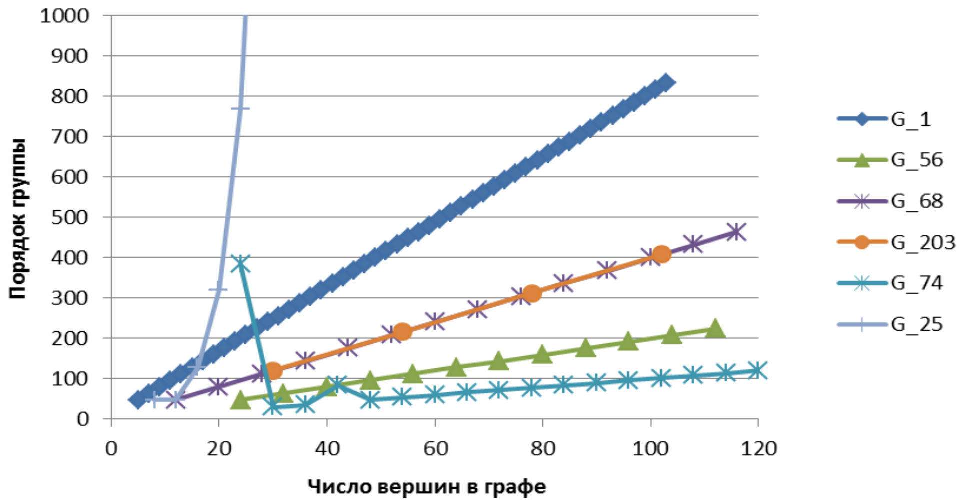


Рис. 7. График зависимости значений характеристик симметрии от числа вершин в графе

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берж К.* Теория графов и ее применение. М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. 320 с.
2. *Харари Ф., Пальмер Э.* Перечисление графов. М.: Мир, 1977. 326 с.
3. *Райншке К., Ушаков И.А.* Оценка надежности систем с использованием графов. М.: Радио и связь, 1988. 208 с.
4. *Shooman M.L.* Reliability of Computer Systems and Networks: Fault Tolerance, Analysis and Design. Wiley-Interscience, 2001. 560 p.
5. *Незнанов А.А., Кохов В.А.* Справочник по теории графов. Характеристики симметрии и сложности связных транзитивных графов степени 4 с числом вершин до 30 включительно. М., 2004. Деп. в ВИНИТИ, №1094-В2004. 418 с.
6. *Кохов В.А.* Диаграммы, числа стабильности и цикловые индексы групп автоморфизмов транзитивных графов // Исследования по прикладной теории графов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1986. С. 97-125.
7. *Sabidussi G.* Vertex-transitive graphs // Monatshefte für Mathematic. 1964. V. 68, Issue 5. P. 426-438.
8. *Yap H.P.* Point symmetric graphs with $p < 13$ points // Nanta Math. 1973. № 6. P. 8-20.
9. *Royle G.F., Praeger C.E.* Constructing the vertex-transitive graphs of order 24 // Journal of Symbolic Computation. 1989. V. 8, Issue 4. P. 309-326.
10. *McKay B.D., Royle G.F.* The transitive graphs with at most 26 vertices // Ars Combinatorial. 1990. № 30. P. 161-176.
11. *Старичкова Ю.В., Незнанов А.А.* Улучшенная классификация и генерация транзитивных графов степени 4 // Информационные средства и технологии: доклады междунар. конф. (МФИ-2008). М., 2008. Т. 2. С. 75-79.
12. *McKay B.D.* The nauty page. URL: http://cs.anu.edu.au/~bdm/ (дата обращения 17.02.2009).
13. *Кохов В.А.* Концептуальные и математические модели сложности графов. М.: Изд-во МЭИ, 2002. 157 с.

Поступила в редакцию 16 февраля 2012 г.

Starichkova Yu.V., Neznanov A.A. ALLOCATION, GENERATION AND VISUALIZATION OF FAMILIES TRANSITIVE GRAPHIC DEGREES 4 UNDER CHARACTERISTICS OF SYMMETRY AND STRUCTURAL COMPLEXITY

The problem of classification of families coherent transitive графов degrees 4 (ТГС4) on the basis of characteristics of symmetry (a structure of group automorphism) and information on all ТГС4 with number of tops up to 30 is considered. One of variants of classification both the concrete infinite and final families covering all ТГС4 up to 30 tops, with an opportunity of expansion of structure of families with growth of number of tops ТГС4 Is offered. The generator of infinite and final families on the basis of the given classification is constructed, allowing building representatives of families TGS4 with the set characteristics of symmetry and a choice of symmetric visualization of their diagrams.

Key words: transitive graph; family; symmetry; structural complexity; drawing; generation.