ЛИТЕРАТУРА

1. *Мезго В.В., Тараканов А.Ф.* Анализ информационной модели иерархической системы при неопределенности с однозначной реакцией нижнего уровня // Системы управления и информационные технологии. 2010. № 4.1(42). С. 171-175.
2. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979. 280 с.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

Mezgo V.V., Tarakanov A.F. The pessimism principle in the estimation of strategies of the lower level of hierarchical system. An information differential model of the hierarchical system in conditions of uncertainty for the case where the answer of the lower level to the upper one's decision is not unique is analysed. The lower level selects his answer within the unfavorably principle. Using the penalty technique, initial maxmin problem is reduced to the maximization one. The necessary optimality conditions are obtained.

Key words: hierarchical system; uncertainty; penalty technique; pessimism principle.

Мезго Виктор Владимирович, Борисоглебский государственный педагогический институт, г. Борисоглебск, Российская Федерация, аспирант кафедры прикладной математики и информатики, e-mail: mezgovv@yandex.ru.

Тараканов Андрей Федорович, Борисоглебский государственный педагогический институт, г. Борисоглебск, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, e-mail: aft777@mail.ru.

УДК 517.98

ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ МНОГОЧЛЕНОВ

© **В.Ф. Молчанов**

Ключевые слова: дельта-функции; многочлены Лежандра; формула Кристофеля–Дарбу.

В пространстве $V_n \subset L^2(-1,1)$, состоящем из многочленов степени $\leqslant n$, обобщенная функция $\delta^{(k)}(x)$ есть скалярное произведение с некоторым многочленом. Мы находим явные выражения его и его нормы, находим асимптотику нормы.

Пусть V_n, $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$, – пространство многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени $\leqslant n$. Его размерность равна $n+1$. Введем в V_n скалярное произведение из $L^2(-1,1)$:

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим в V_n линейный функционал $\delta^{(k)}$ (k-я производная дельта-функции, сосредоточенной в нуле):

$$\delta^{(k)}(f) = (-1)^k \left. \frac{d^k f}{dx^k} \right|_{x=0}. \tag{1}$$

В частности, $\delta^{(0)}$ есть дельта-функция, сосредоточенная в нуле: $\delta(f) = f(0)$.

Этот функционал $\delta^{(k)}$ является скалярным произведением с некоторым многочленом $H_{k,n}(x)$ из V_n:

$$\delta^{(k)}(f) = (f\,, H_{k,n}). \tag{2}$$

Т е о р е м а 1. *Многочлен $H_{k,n}(x)$ имеет ту же четность, что и k, его явное выражение есть*:

$$H_{k,n}(x) = \sum c_m(k,n) x^m,$$

где суммирование происходит по $m = 0, 1, \ldots, n$, причем $m \equiv k$ (здесь и дальше знак сравнения означает сравнение по модулю 2). Если $n \equiv k$, то

$$\begin{aligned} c_m(k,n) \;\; &= \;\; (-1)^{(m+k)/2}\, 2^{-2n-1} \cdot \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{k+m+1} \times \\ &\times \;\; \frac{(n+k+1)!}{\left(\dfrac{n-k}{2}\right)! \left(\dfrac{n+k}{2}\right)!} \cdot \frac{(n+m+1)!}{\left(\dfrac{n-m}{2}\right)! \left(\dfrac{n+m}{2}\right)!}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Если $n \not\equiv k$, то $H_{k,n}(x)$ совпадает с $H_{k,n-1}(x)$ (поскольку $\delta^{(k)}$ обращается в нуль на многочленах четности $k+1$).

Приведем набросок доказательства. Мы используем многочлены Лежандра $P_m(x)$ [1]. Приведем некоторый материал из [1]. Многочлены Лежандра получаются ортогонализацией в $L^2(-1,1)$ последовательности $1, x, x^2, \ldots$ со стандартизацией $P_m(1) = 1$. Скалярный квадрат многочлена $P_m(x)$ есть:

$$(P_m, P_m) = \frac{2}{2m+1}\,.$$

Напишем явное выражение:

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m} \sum_{v=0}^{[m/2]} (-1)^v \binom{m}{v} \binom{2m-2v}{m} x^{m-2v}\,. \tag{4}$$

Имеет место формула Кристофеля–Дарбу:

$$\sum_{m=0}^{n} (2m+1)\, P_m(x)\, P_m(y) = (n+1) \cdot (x-y)^{-1} \cdot \begin{vmatrix} P_{n+1}(x) & P_n(x) \\ P_{n+1}(y) & P_n(y) \end{vmatrix}\,. \tag{5}$$

Многочлены $P_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, образуют ортогональный базис в пространстве V_n. Многочлен $f \in V_n$ разлагается по этому базису следующим образом:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{2m+1}{2}\, (f, P_m)\, P_m(x)\,.$$

Применим это к $H_{k,n}(x)$, тогда мы получим:

$$H_{k,n}(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{2m+1}{2}\, (-1)^k\, P_m^{(k)}(0)\, P_m(x)\,.$$

Сравнивая это с (5), мы находим

$$\begin{aligned} H_{k,n}(x) \;\; &= \;\; (-1)^k\, k! \cdot \frac{n+1}{2} \cdot x^{-k-1} \times \\ &\times \;\; \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{r!}\, x^r \begin{vmatrix} P_{n+1}(x) & P_n(x) \\ P_{n+1}^{(r)}(0) & P_n^{(r)}(0) \end{vmatrix}\,. \end{aligned}$$

Последнюю формулу можно переписать так. Для многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ обозначим через $(T_k f)(x)$ его многочлен Тейлора порядка k:

$$(T_k f)(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k,$$

и обозначим через $(S_k f)(x)$ его «остаток», то есть

$$(S_k f)(x) = a_{k+1} + a_{k+2} x + a_{k+3} x^2 + \ldots,$$

так что

$$f(x) = (T_k f)(x) + x^{k+1} (S_k f)(x).$$

Тогда

$$H_{k,n}(x) = (-1)^k \, k! \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \begin{vmatrix} (S_k P_{n+1})(x) & (S_k P_n)(x) \\ (T_k P_{n+1})(x) & (T_k P_n)(x) \end{vmatrix} .$$

Подставляя сюда явные выражения многочленов $P_{n+1}(x)$ и $P_n(x)$ (см. (4)) и выполняя достаточно сложные комбинаторные вычисления, мы получаем (3).

Напишем явное выражение для нормы многочлена $H_{k,n}(x)$ и найдем асимптотику этой нормы при $n \to \infty$.

Т е о р е м а 2. *Если* $n \equiv k$, *то*

$$\|H_{k,n}\|^2 = 2^{-2n-1} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \left\{ \frac{(n+k+1)!}{\left(\dfrac{n-k}{2}\right)! \left(\dfrac{n+k}{2}\right)!} \right\}^2 . \tag{6}$$

Доказательство. По определению, см. (1) и (2), мы имеем

$$\|H_{k,n}\|^2 = (H_{k,n}, H_{k,n}) = (-1)^k \, \frac{d^k}{dx^k} \, H_{k,n}(x) \Big|_{x=0}.$$

Следовательно, для $n \equiv k$ мы получаем

$$\|H_{k,n}\|^2 = (-1)^k \, k! \, c_k(k,n).$$

Вместе с (3) это дает (6).

Применяя к (6) формулу Стирлинга, получаем

Т е о р е м а 3.

$$\|H_{k,n}\|^2 \sim \frac{n^{2k+1}}{(2k+1)\pi} , \quad n \to \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 09–01–00325 а), Научной программой «Развитие научного потенциала высшей школы» РНП 1.1.2/9191, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы» (14.740.11.0349) и Темпланом 1.5.07.

Molchanov V.F. Delta functions on spaces of polynomials. On the space $V_n \subset L^2(-1,1)$, consisting of polynomials of degree $\leqslant n$, the distribution $\delta^{(k)}(x)$ is the inner product with some polynomial. We write explicit expressions of it and its norm and find the asymptotic of the norm.

Key words: delta functions; Legendre polynomials; Christoffel–Darboux' formula.

Молчанов Владимир Федорович, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, e-mail: molchano@molchano.tstu.ru.

УДК 517.995

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

© С.А. Муртазина

Ключевые слова: бифуркация; вынужденные колебания; субгармонические колебания.
Рассматривается задача о локальных бифуркациях вынужденных колебаний двупараметрических динамических систем. Предлагается теорема об устойчивости возникающих периодических решений.

Рассмотрим систему, зависящую от двумерного параметра $\mu = (\alpha, \beta)$ и T-периодической по t правой частью:

$$x' = \big(A_0 + (\alpha - \alpha_0)A_{11}(t) + (\beta - \beta_0)A_{12}(t)\big)x + a(x, t, \alpha, \beta), \ x \in R^N. \tag{1}$$

Положим, что правая часть непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по x и μ; каждое начальное условие $x(t_0) = x_0$ однозначно задает решение $x(t)$ уравнения (1), определенное при всех t; $a(x, t, \mu)$ равномерно по t и μ удовлетворяет соотношению $\|a(x, t, \mu)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \to 0$.

При изменении характера устойчивости нулевого решения в системе (1) возможны различные локальные бифуркации в окрестности решения $x \equiv 0$. в частности возможно возникновение ненулевых T-периодических решений (бифуркация вынужденных колебаний), ненулевых qT-периодических решений, $q > 1$ (бифуркация субгармонических колебаний) и др. Задача о таких бифуркациях изучалась во многих работах [1–3]. В данной работе предлагается схема приближенного исследования бифуркации субгармонических колебаний и приводится теорема об устойчивости возникающих периодических решений. Ниже предполагается выполненным следующее условие:

U1) A_0 имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm\dfrac{2\pi\theta i}{T}$. Здесь $\theta \in (0, 1]$, θ рационально, $\theta = \dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь, и не имеет других собственных значений на мнимой оси.