УДК 519.92

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

© С. Векшенов

Vekshenov S. Continuity and quantum theory. The article looks at the phenomenon of continuity and proposes arguments for a model of continuity based on quantum theory. Quantum theory, which functions with complementary, reflects the intuition of continuous. Quantum leaps are stipulated by the uncertainty of the measurement results.

Осмысление феномена непрерывности и развитие его формализмов всегда было одной из «сверхзадач» человеческой мысли.

В настоящее время общепринятая модель континуума опирается на теорию множеств Г. Кантора. На другом полюсе находится квантовая теория – столь же общепринятый эталон дискретного.

Цель настоящей работы – сформулировать основные аргументы в пользу обратной картины.

Суть ее заключается в том, что теория множеств дает хорошо структурированную, но все же не адекватную модель континуума.

Квантовая теория, напротив, оперируя с «дополнительностью», более точно отражает традиционную интуицию непрерывного. Появление же квантовых скачков обусловлено неопределенностью результатов измерения сопряженных величин в не-канторовском континууме.

Этот внешне парадоксальный тезис основан на следующих утверждениях.

1. В классических апориях Зенона (прежде всего, в апориях «Ахиллес» и «Дихотомия») вполне обрисована связь непрерывности с актуальной бесконечностью. Более того, в этих апориях речь идет о *двух* типах актуальной бесконечности: бесконечности количества – ω (которую можно расширить до любого кардинала $\aleph_\lambda$) и бесконечности порядка – Ω. При этом выполняется неравенство $\Omega > \omega$.
2. Теория множеств Кантора принципиально *не различает* эти бесконечности. Для нее существенно только бесконечное количество, которое воплощается в множестве. Соответственно, среда непрерывности, континуум в этой теории мыслится множеством. Этот подход мало соответствует первоначальной, идущей от Аристотеля идее, что «неделимые» (элементы множества) являются только внешним проявлением непрерывного. Теория точечного континуума дает вполне удовлетворительную (хотя и с множеством проблем) модель непрерывного, на предметном уровне, пока различие между количественной и порядковой бесконечностью не существенно. При переходе на атомный уровень теоретико-множественная модель континуума перестает работать.
3. Квантовая теория в значительной мере опирается на принцип «дополнительности», который в ряде ситуаций можно понимать как «принцип непрерывности», включающий в себя как *порядковую, так и количественную бесконечности*. Континуум, в этой непрерывности, является не-канторовским, динамическим образованием. Измерение в этом континууме может быть осуществлено путем вложения в него натурального числа с некоторым коэффициентом $\hbar$ (градуирование континуума). Отсюда можно извлечь соотношение неопределенности.

Рассмотрим эти аргументы более подробно.

1

Идея непрерывного, как известно, восходит к апориям Зенона, прежде всего «Ахиллес» и «Дихотомия».

Мы не будем пытаться реконструировать его аргументы, а попытаемся понять, какие именно проблемы возникают при осмыслении феномена непрерывности, которые и привели к возникновению апорий.

Как известно, суть апории «Ахиллес» сводится к следующему.

Пусть Ахиллеса отделяет от финиша расстояние в l, а черепаху в $l/2$. Предположим, что Ахиллес бежит быстрее черепахи в два раза. Ахиллес и черепаха начинают двигаться одновременно. Зенон утверждает, что Ахиллес никогда не догонит черепаху. Действительно, в то время как Ахиллес пробегает половину пути, т. е. приходит в точку начала движения черепахи, она успеет проползти отрезок в $l/4$. Когда же Ахиллес преодолеет расстояние в $l/4$, черепаха пройдет расстояние в $l/8$ и опять окажется впереди Ахиллеса, и т. д. Таким образом, всякий раз, когда Ахиллес преодолевает расстояние, отделяющее его от черепахи, она успевает уползти от него на некоторое расстояние.

Попытаемся выявить формальную сторону этой апории.

Рассмотрим конечный отрезок $[A, B]$. Представим его в виде счетной суммы отрезков:

$$[A, B] = \sum_{k=1}^{\omega} \left[a_{k,} a_{k+1}\right],$$

где $a_1 = A$ и $a_\omega = B$.

Если считать a_k – шагами Ахиллеса, а a_{k+1} – шагами черепахи, то, очевидно, что в точке B Ахиллес догонит черепаху. С другой стороны, точки этой последовательности *занумерованы* натуральными числами (точнее, порядковыми натуральными числами), которые вовсе не оканчиваются на ω, поскольку всегда можно сделать еще один шаг и образовать числа: ω + 1, ω + 2… Таким образом, последовательность $\{a_k\}$, с одной стороны, сходится к B, с другой, с точки зрения номеров, – неограниченна. Заметим, что ситуация останется ровно такой же, если заменить число ω любым кардиналом $\aleph_\lambda$.

Эта двойственность в понимании сходимости последовательности $\{a_k\}$ отразилась в двойственной оценке этой апории. Значительная часть авторов считала, что проблема исчерпывается введением актуальной бесконечности, которую Зенон (как, впрочем, и вся античная наука) предпочитал избегать. Однако после всестороннего исследования теоретико-множественной бесконечности, такое решение стало рассматриваться как не вполне убедительное.

Примером этому является следующее замечание Д. Гильберта и П. Бернайса, высказанное ими в знаменитой монографии «Основания математики».

«Обычно этот парадокс пытаются обойти рассуждениями о том, что сумма бесконечного числа этих временных интервалов все-таки сходится и дает конечный промежуток времени. Однако это рассуждение абсолютно не затрагивает один существенный парадоксальный момент, а именно парадокс, заключающийся в том, что некая последовательность следующих друг за другом событий, последовательность, завершаемость которой мы не можем себе даже и представить (не только фактически, но хотя бы даже и в принципе), на самом деле все-таки должна завершиться…» [1].

Вернемся к формализованным рассуждениям.

В приведенном выше представлении отрезка $[A, B]$ имеются два взаимосвязанных параметра: число разбиений ω и длина отрезка $[a_k, a_{k+1}]$. Число разбиений имеет своим пределом число Ω. Можно предположить, что этому случаю соответствует нулевая длина отрезка $[a_k, a_{k+1}]$, т. е. справедливо следующее соотношение:

$$[A, B] = \sum_{k=1}^{\Omega} (a_k) ,$$

где $a_1 = A$ и $a_\Omega = B$ *и* (a_k) означает точку с номером k.

Однако, это не так, поскольку тогда отрезок $[A, B]$ представлял бы собой упорядоченное *множество,* кардинальное число которого $\aleph_\lambda$ заведомо меньше Ω: $\aleph_\lambda < \Omega$.

Таким образом, дойдя до числа Ω, мы получим следующее разбиение отрезка $[A, B]$:

$$[A, B] = X + Y,$$

где X – *неограниченная совокупность* «точек», Y – *совокупность* «не-точек», неких «агрегатов», которые противопоставляются точкам и составляют с ними единое целое.

Отрезок $[A, B]$, фигурирующий в конструкции Зенона, является интуитивно непрерывным. В его разбиении на компоненты X и Y можно усмотреть проявление принципа *дополнительности*, который в данном случае можно считать принципом *непрерывности*.

Основанием для этого утверждения является следующее замечание. Если мы перейдем к теоретико-множественной модели $[A, B]$, т. е. будем предполагать, что «не-точки» все же являются «точками» (это отождествление приводит ко многим недоразумениям, но не о них сейчас речь), то компонента X определяет *плотность* множества $[A, B]$. В то же время компонента Y подчеркивает, что в этом множестве *нет* «*пустот*». Тем самым получается классическая конструкция дедекиндова сечения. Это значит, что «принцип соответствия» выполнен, и сформулированный выше «принцип дополнительности» действительно можно считать принципом непрерывности.

В этой трактовке непрерывного важно подчеркнуть следующий момент. Среда непрерывности, континуум состоит из объектов двух сортов: «точек» и «не-точек», причем самое адекватное представление о «не-точках» состоит именно в том, что они *не являются* точками. Как известно, в богословии такой, отрицательный, подход называется апофатическим («Ты есть Бог неведомый, невидимый, неизъяснимый, непостижимый»). Именно апофатический принцип, по форме отрицательный, а в действительности резко расширяющий границы нашего понимания Міра, может явиться основным научным принципом XXI века (В.Н. Тростников).

2

В первом математически корректном приближении в качестве «не-точек» могут выступать очень разные объекты, с помощью которых отрезок $[A, B]$, а в общем случае континуум, можно «настраивать» на различные задачи.

Можно доказать, что в качестве «не-точек» можно взять следующие объекты:

– бесконечно-малые величины dx в их изначальном, лебницевском понимании;

– отношения $r_{ij}, \ldots, r_{kl}$, подчиненные $\Phi(r_{ij}, \ldots, r_{kl}) = 0$;

– совокупность всех траекторий $\{\gamma(t)\}$, выходящих из фиксированной точки;

– совокупность волн $\{\Psi\}$.

Соответствующие континуумы можно обозначить как R^{dx}, R^{rij}, $R^{\gamma(t)}$, R^{Ψ}. В этих континуумах «не-точки» играют такую же роль в континууме, что и подвижные метрические коэффициенты g_{ij} в римановой геометрии.

В соответствии с идей априоризма И. Канта, которую нет основания радикально пересматривать, объект внешнего мира $\mathcal{E}$ видится через a'priory заданные абстрактные формы. Если считать, что непрерывная среда, континуум, является необходимым условием движения, он и является одной из таких форм. Наглядно эту ситуацию можно изобразить в следующем виде:

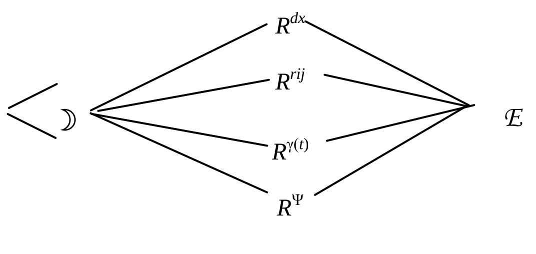

Рис. 1.

Можно предположить, что именно выбор континуума ответственен за принятие той или иной физической парадигмы. Например, континуум R^{Ψ} индуцирует парадигму, в которой главными «действующими лицами» являются частицы («точки») и поля, – «не-точки Ψ», что соответствует представлениям квантовой теории поля.

Континуум R^{dx} можно рассматривать как предельный случай континуума R^{Ψ}, когда амплитуда волны Ψ пренебрежительно мала. Поскольку бесконечно-малые величины не имеют собственного физического аналога, можно предположить, что континуум является «чистой средой непрерывности», свойства которой определяют свойства физических объектов. К теориям этого типа можно отнести общую теорию относительности А. Эйнштейна и геометродинамику А. Уилера.

Континуум $R^{\gamma(t)}$, очевидно, соответствует лагранжевой механике и фейнмановскому варианту квантовой механики.

Континуум R^{rij} имеет, по крайней мере, два соответствия в области физики. Первое – традиционный ньютоновский подход, когда взаимодействия межу точками (отношения r_{ij} на языке R^{rij}) происходят на фоне абсолютного и непрерывного (в смысле «не-точек» dx, dy, dz) пространства. Второй подход, развиваемый Ю.И. Кулаковым и Ю.С. Владимировым, исходит из взаимодействия частиц и не нуждается в таких субстанциях как пространство и время.

Введение многообразия континуумов стало возможным благодаря расширению интуиции непрерывного. Со времен Лейбница непрерывность мыслилась как одно из условий самодостаточности мира, как следствие общего принципа законопостоянства, который утверждал, что свойства вещей всегда и повсюду являются такими же, каковы они здесь и сейчас. В мире, непрерывном по Лейбницу, нет места «особым точкам», а значит, и нет места любому «вмешательству извне».

В нашем понимании непрерывность есть, по сути, синоним всеобщей связи, *всеединства* различных уровней бытия (именно так понимал непрерывность, например, св. Фома Аквинский). В этом случае «точки» можно соотнести с «реальным» бытием, а «не-точки» – с трансцендентным.

Такое понимание непрерывности позволяет реконструировать (разумеется, в авторской трактовке) ряд поворотных моментов в развитии фундаментальных представлений современной науки.

Общая схема их развития представляется в следующем виде.

«Апории» Зенона традиционно принято считать отправной точкой современного естествознания и математики, что, по-видимому, соответствует действительности. Именно при разрешении этих апорий Аристотелем было введено фундаментальное понятие непрерывности. Это, свою очередь, повлекло за собой введение не менее фундаментального понятия – бесконечности. Аристотель не разрешил проблемы до конца, предпочитая оставаться в рамках потенциальной бесконечности. Однако без разрешения апорий Зенона феномен движения не получал необходимой абстрактной модели и, следовательно, дальнейшее развитие физики было невозможно. С другой стороны, трудности, возникающие при решении этих апорий, значительно превосходили возможности даже самых выдающихся последователей Аристотеля. Основные проблемы группировались вокруг понятия бесконечного. Требовалось принять не только актуальную бесконечность, что само по себе вылилось в исключительно сложную проблему. Но и этого оказалось недостаточным. Надо было принять существование качественно различных бесконечностей (и вложенности большей бесконечности в меньшую). В этом случае можно было бы завершить временной и пространственной ряды, возникающие в апории Зенона, и тем самым строго определить среду непрерывности, континуум. Именно по отношению к этой среде можно корректно говорить и о самом понятии движения.

Исключительная сложность этой задачи находилась в явном противоречии с очевидностью самого феномена движения. После безуспешных попыток соединить его свойства со свойствами континуума, которые растянулись на весь период Античности и Средневековья, пришло новое понимание проблемы.

Со времен Галилея отправной точкой развития физической теории становится движение как таковое. Свойства среды, континуума, отошли на второй план, и основная задача в понимании движения свелась к выяснению его характера или, говоря языком математики, определению его уравнения. В свою очередь, характер движения, его уравнение, зависит от вполне определенных причин. В физике Галилея эти причины должны были иметь материальную природу, что символизировало принципиальный разрыв с физикой Аристотеля, в которой причина движения лежала, как известно, в метафизической плоскости. Эта традиция была нарушена в общей теории относительности А. Эйнштейна. В ней характер движения частицы в гравитационном поле определялся метрикой пространства-времени, т. е. свойствами среды непрерывности (точнее само поле было объявлено метрикой пространственно-временного континуума).

В классической, а позднее в релятивистской физике идея непрерывности была своего рода фоном всех без исключения теорий. Например, в механике Ньютона пространство и время были не только абсолютной системой отсчета, но и средой непрерывности, которая обеспечивала саму возможность движения.

В этой связи примечательной является та критика, которой подвергалась механика Ньютона со стороны Э. Маха. С точки зрения развитой в данной заметке теории, Мах предъявлял к механике Ньютона претензии именно исходя из идеи непрерывности. Действительно, структура континуума этой теории выглядела следующим образом:

Континуум Ньютона = {*множество материальных «точек»*} + {*абсолютное пространство и абсолютное время, обеспечивающее существование «не-точек»*: dx, dy, dz, dt}.

Критикуя абсолютность пространства и времени, Мах по ходу дела мысленно спрашивает: нельзя ли обеспечить непрерывность континуума Ньютона другим способом, помимо пространства и времени. Прямо такого вопроса он все же не ставил, но его принцип всеобщей взаимосвязи «точек» – «принцип

Маха», можно в значительной мере считать принципом непрерывности. Полностью «отменить» субстанциональное пространство – время и перейти к отношениям как новым «не-точкам» удалось только в теории БСКО Ю.С. Владимирова.

В конце XIX века Кантором была сделана первая масштабная попытка формализовать понятие непрерывного. Как известно, он свел непрерывность к множеству «точек», не включив в рассмотрение «не-точки». В его «непрерывности» фигурировала только одна бесконечность – количественная. Тем самым он построил лишь теоретико-множественную *модель* непрерывности. Таким образом, к началу XX века программа Аристотеля по обоснованию феномена движения была продвинута лишь немногим дальше, чем это удалось сделать ее основателю. С другой стороны, в рамках классической физики не возникло потребности «побеспокоить» среду непрерывности, и канторовский континуум виделся вполне удовлетворительной конструкцией.

Ситуация стала кардинально меняться, когда физика предприняла попытку «прорваться» к атому. На этом уровне стали проявляться свойства не только «точек», но и свойства «не-точек». Именно тогда квантовая механика в поисках адекватной модели непрерывности вспомнила забытого Кантором Зенона. Именно Зенона вспоминал Н. Бор, объясняя принцип дополнительности: компоненты импульса p_x, p_y, p_z соответствуют курпускулярному аспекту частицы, в некотором смысле исключающему по Зенону идею движения, в противоположность этому координаты x, y, z соответствуют волновому аспекту, носящему чисто динамический, нелокализованный характер. Появление же такого понятия как «квантовый эффект Зенона» (Б. Мизра, Е. Сударшан) говорит само за себя. Таким образом, есть все основания видеть в квантовой теории ту самую теорию непрерывности, которая осталась незавершенной со времен Аристотеля.

Однако строить теорию непрерывного на основе квантовой механики, – значит поставить проблему с ног на голову. Необходимо вернуться к ее истокам, – апориям Зенона. Именно анализ апорий показывает, что в непрерывном с необходимостью присутствуют две бесконечности: количественная и порядковая. С этих позиций можно очень многое понять как в самой математике, так и в современной физике, в частности, квантовой теории.

3

Последний «штрих» в обоснование идеи о квантовой механики как теории непрерывного вносит проблема измерения физической величины X, которую мы традиционно будем считать непрерывной. Результаты такого измерения решающим образом связаны с выбором модели этой непрерывности (континуума).

Если придерживаться точечной модели, то в ней имеет место взаимно-однозначное соответствие f между действительными числами D и точками континуума $\mathcal{K}$, которому принадлежит величина X, f: $D \to \mathcal{K}$. В этом случае точность измерения теоретически может быть неограниченной.

Если же в континуум $\mathcal{K}$ входят «не-точки», ситуация кардинально меняется. С одной стороны, совокупность точек постоянно пополняется новыми точками, т. е. континуум превращается в *среду становления*. С другой стороны, в нем появляются новые образования, которые препятствуют установлению взаимно однозначного соответствия с действительными числами. Иными словами, взаимно однозначное соответствие f должно быть заменено на более «скромное» отображение g. Минимальное требование к g состоит в том, что одно должно обеспечить вложение множества натуральных чисел N в континуум, при котором сохраняется «расстояние» между образами чисел. Иными словами, в динамическом континууме $\mathcal{K}$ должны существовать счетное множество «неподвижных точек», которые позволяют «проградуировать» $\mathcal{K}$, т. е. осуществить вложение $g(N) \subset \mathcal{K}$. Из общефилософских соображений такое вложение a'priory должно существовать. В противном случае теряется сама идея устойчивости окружающего мира – существование в нем неких инвариантов, «аттракторов», что, собственного говоря, и дает возможность что-либо измерять. В этом плане примечательным является наблюдение В. Вайскопфа о существовании устойчивых энергетических состояний на всех иерархических уровнях материи [2].

С другой стороны, это вовсе не означает, что отображение g *существует для всех* физических величин X – это существенный поворот: возможность измерения данной величины надо *доказывать*. В развитии этой мысли можно доказать, что следствием вложения времени бесконечности Ω в пространство бесконечности ω (обобщенный принцип Дирихле), – а именно такое вложение и необходимо для разрешения рассмотренной выше апории Зенона, – является существование отображения g для величины *действия* S. Это вложение позволяет построить для действия S шкалу с ценой деления h. Величину h можно отождествить с постоянной Планка $\hbar$. С другой стороны, очевидны следующие соотношения:

$$\Delta S \geq \Delta q \Delta p \geq \min \Delta S = \hbar;$$
$$\Delta S \geq \Delta E \Delta t \geq \min \Delta S = \hbar.$$

Тем самым мы приходим к принципу неопределенности Гейзенберга. Этот принцип является следствием появления дискретности *при измерении* непрерывной, в смысле наличия «точек» и «не-точек», величины действия S. В свою очередь, эта дискретность есть следствие вложенности бесконечности Ω в бесконечность ω.

Таким образом, дискретность действия S и неопределенность результатов измерения становятся следствием расширения идеи непрерывности.

4

Обрисованная выше теория, которую можно назвать «универсальной непрерывностью», подводит к мысли о возможности осуществления синтеза программ Аристотеля и Галилея.

Напомним еще раз содержание этих программ.

Основной задачей Аристотеля было обоснование *мыслимости феномена движения*. Для этого потребовалось ввести понятие непрерывной среды, континуума. Осмысление и формализация этого понятия сопровождали всю историю естествознания. Проблема состояла в том, что в континууме реализуются два типа бесконечности, порядковая и количественная.

Галилей, напротив, исходил из феномена движения как такового. Его главной целью было описание движения на формализованном языке – языке математики. Свойства среды, в которой протекает движение, в его теории не рассматривались.

Таким образом, в структуре механики (и, разумеется, во всей физике) выделяются два независимых «блока»:

– среда, в которой осуществляется движение. В классической и релятивистской механике этой средой является пространство-время. Это же пространство-время является носителем непрерывного. В общем случае, – это континуум с «точками» и «не-точками»;

– математический аппарат описания движения. В идеальном случае – это уравнения, устанавливающие причинно-следственную связь между физическими величинами. При этом следует отметить важный момент. Хотя основной абстракцией механики является материальная точка, уравнение движения относится к «не-точкам», поскольку точка «тонет» в континууме.

К этим двум блокам необходимо добавить блок, связанный с описанием функции *f*, которая определяет характер измерения физических величин и которая, как было показано выше, зависит от принятой модели континуума.

Это значит, что общую структуру физической теории можно представить в виде следующей тройки:

$$T_X = < R^X, \ \ F_X(y) = 0, \ \ f_X >,$$

где R^X – один из континуумов R^{dx}, R^{rij}, $R^{\gamma(t)}$, R^{Ψ} (и, возможно, какой-либо другой континуум), $F_X(y) = 0$ – уравнение, в которое входит «не-точка» континуума R^X, f_X – функция, определяющая характер измерения в R^X.

Важный методологический принцип заключается в следующем. При описании данного феномена, мы можем свободно заменять одну «не-точку» другой, т. е. заменять континуум R^{X_1} на континуум R^{X_2}, поскольку общее свойство непрерывности при такой замене сохраняется. При этом, естественно, происходит замена уравнения $F = 0$ и функции f на соответствующие уравнение и функцию измерения.

В качестве применения этого принципа можно указать на объяснение отсутствия отдачи в эффекте Мёссбауэра (замена «не-точки» Ψ «не-точкой» r_{ij}), естественное разрешение парадокса Эйнштейна – Подольского – Розена. Наконец, данная замена дает обоснование возможности преодоления на малых энергиях кулоновского отталкивания. Это, в свою очередь, проясняет механизм ядерных реакций в биологических и минералогических объектах (Б.У. Родионов).

Таким образом, основным инструментом при объяснении феноменов окружающего мира является не столько отдельная теория T_X, сколько их объединение $T = \bigcup_X T_X$. При этом каждый из компонентов T_X играет роль *языка,* который зависит от класса задач, решаемых в данный момент в рамках теории ***T***. Это означает, в частности, что «волна материи» («не-точка» Ψ) является лишь *одним из образов* некого, в общем случае непознаваемого, объекта, что еще раз подтверждает важность упомянутого выше апофатического принципа.

Названый подход позволяет с единой позиции посмотреть на *все* имеющиеся на сегодняшний день версии квантовой теории, включая и такие экзотические интерпретации как «многомировая» концепция Г. Эверетта. Собственно говоря, речь идет об одной теории непрерывности и различных *языках*, выражающих эту непрерывность.

Дальнейшее развитие этих положений приводит к чрезвычайно интересным следствиям, но их обсуждение уже выходит за рамки данной заметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. М.: Наука, 1979. Т. 1. С. 40.
2. *Weisskopf V.F.* // Sci. Amer. 1968. V. 218 (5). P. 15.
3. *Векшенов С.А.* Является ли множество действительных чисел множеством? // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2000. Т. 5. Вып. 5. С. 519-535.
4. *Векшенов С.А.* Неканторова бесконечность в математике и богословии // Два града. Диалог науки и религии: Сб. / Ин-т философии РАН. М., 2002. С. 257-276.
5. *Vekshenov S.A.* Geometrical interpretation of the Schrödinger equation // Gravitation and Cosmology. 2002. T. 5. Supplement. P. 233-235.
6. *Векшенов С.* Проблемы и парадоксы континуума // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2004. Т. 9. Вып. 2. С. 268-283.

Поступила в редакцию 12 апреля 2004 г.