УДК 517.977.58

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© В.И. Левин

Levin V.I. The transport problem of linear programming with interval parameters. A method is proposed to solve transport problems of linear programming with inaccurate (interval) coefficients. It is based on the theory of interval comparison and extremal interval choice.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] был предложен некоторый новый подход к решению недетерминированных задач математического программирования, в которых параметры целевой функции и ограничений заданы интервалами возможных значений. Подход основан на разработанных методах прямого сравнения интервалов и определении экстремального интервала. Его достоинство – возможность сведения недетерминированной задачи к решению двух соответствующих детерминированных задач, в которых параметры целевых функций и ограничений определяются нижними и верхними границами интервалов – параметров исходной задачи. Этим путем в главе 1 была решена интервальная задача о назначениях, в главе 2 – задача интервального булева линейного программирования и в главах 3, 4 – общая задача линейного программирования в интервальной постановке. Представляется естественным распространить предложенный подход на транспортную задачу линейного программирования. Особенность интервального варианта этой задачи по сравнению с рассмотренными ранее задачами заключается в его смешанном характере, когда коэффициенты при неизвестных у целевой функции – интервальные, а коэффициенты при неизвестных в ограничениях – детерминированные величины. С другой стороны, ограничения в транспортной задаче линейного программирования имеют специальный вид по сравнению с ограничениями в общей задаче линейного программирования. Все это делает целесообразным выделение транспортной задачи линейного программирования в отдельный случай, для которого ищутся более эффективные, чем в общем случае, методы решения. Как и в главах 3, 4, будем искать неизвестные, являющиеся решением этой задачи, в той же форме, в которой заданы ее параметры, т. е. в виде интервалов возможных значений.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Детерминированный вариант транспортной задачи, как известно, состоит в определении минимума линейной функции

$$Q(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \min, \tag{1}$$

при наличии ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b'_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

и дополнительном условии неотрицательности неизвестных

$$x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Здесь x_{ij} – неизвестный план перевозок продукции от i-го производителя к j-му потребителю, c_{ij} – стоимость перевозок единицы продукции от i-го производителя к j-му потребителю, b_i – производительность i-го производителя, b'_j – потребность j-го потребителя. Все эти величины образуют соответствующие векторы и матрицы: $X = \|x_{ij}\|$ – матрицу объемов перевозок от производителей к потребителям, $C = \|c_{ij}\|$ – матрицу стоимостей перевозок от производителей к потребителям, $b = \|b_i\|$ – вектор производительностей, $b' = \|b'_j\|$ – вектор потребностей. Коэффициенты c_{ij}, b_i, b'_j в (1)–(3), по смыслу задачи, являются неотрицательными величинами. Таким образом, требуется найти такой (оптимальный) план перевозок от производителей к потребителям, при котором суммарные перевозки от каждого производителя ко всем потребителям не превышают его производительности, суммарные перевозки от всех производителей к любому потребителю покрывают его потребность, а суммарная стоимость перевозок минимальна.

Задача (1)–(3) представляет собой некоторую стандартную задачу линейного программирования, т. е. задачу с ограничениями-неравенствами. Эта задача имеет решение при следующем необходимом и достаточном условии

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \ge \sum_{j=1}^{n} b'_j, \tag{4}$$

т. е. когда суммарная производительность превышает суммарную потребность (точнее, не меньше ее). Для отыскания решения транспортной задачи (1)–(3) разработан ряд специальных эффективных методов, главные из них – распределительный и метод потенциалов.

Недетерминированная (интервальная) транспортная задача, изучаемая ниже, отличается от задачи (1)–(3) тем, что коэффициенты в ней имеют вид замкнутых интервалов $\widetilde{c}_{ij} = [c_{ij1}, c_{ij2}]$, $\widetilde{b}_i = [b_{i1}, b_{i2}]$, $\widetilde{b}'_j = [b'_{j1}, b'_{j2}]$, в которых находятся возможные значения их величин, причем конкретные значения коэффициентов внутри указанных интервалов неизвестны. Так что матрица коэффициентов c_{ij} целевой функции задачи (1) является здесь интервальной матрицей $\widetilde{C} = \|[c_{ij1}, c_{ij2}]\| = [C_1, C_2]$, где $C_1 = \|c_{ij1}\|$ – минимальная, а $C_2 = \|c_{ij2}\|$ – максимальная детерминированные матрицы коэффициентов, составленные из минимальных (максимальных) значений коэффициентов. Аналогично, имеем интервальный вектор ограничений сверху $\widetilde{b} = \|\widetilde{b}_i\| = \|[b_{i1}, b_{i2}]\| = [b_1, b_2]$, где $b_1 = \|b_{i1}\|$ – минимальный, а $b_2 = \|b_{i2}\|$ – максимальный детерминированный вектор ограничений сверху, составленный из минимальных (максимальных) значений этих ограничений.

Также имеем интервальный вектор ограничений снизу $\widetilde{b} = \|\widetilde{b}'_j\| = \|[b'_{j1}, b'_{j2}]\| = [b'_1, b'_2]$, где $b'_1 = \|b'_{j1}\|$ – минимальный, а $b'_2 = \|b'_{j2}\|$ – максимальный детерминированный вектор ограничений снизу, составленный из минимальных (максимальных) значений этих ограничений.

Введенные интервальные параметры позволяют представить интервальную транспортную задачу в таком виде: определить минимум линейной функции

$$Q(\widetilde{X}) \equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{ij} \widetilde{x}_{ij} = \min, \tag{5}$$

при наличии линейных ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} \widetilde{x}_{ij} \le \widetilde{b}_i, i = \overline{1,m}; \quad \sum_{i=1}^{m} \widetilde{x}_{ij} \ge \widetilde{b}'_j, j = \overline{1,n}, \tag{6}$$

и дополнительном условии неотрицательности неизвестных

$$\widetilde{x}_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Неизвестные в задаче (5)–(7) ищутся в той же интервальной форме, в которой заданы параметры целевой функции и ограничений

$$\widetilde{x}_{ij} = [x_{ij1}, x_{ij2}], \tag{8}$$

так что имеем интервальную матрицу неизвестных $\widetilde{X} = \|\widetilde{x}_{ij}\| = \|[x_{ij1}, x_{ij2}]\| = [X_1, X_2]$, где $X_1 = \|x_{ij1}\|$ – минимальная, а $X_2 = \|x_{ij2}\|$ – максимальная детерминированные матрицы неизвестных, составленные из минимальных (максимальных) значений неизвестных. Интервальные коэффициенты $\widetilde{c}_{ij}$, $\widetilde{b}_i$, $\widetilde{b}'_j$ в (5)–(7), по смыслу задачи, являются неотрицательными интервалами. Итак, в задаче (5)–(7), в отличие от задачи (1)–(3), неизвестные, коэффициенты при неизвестных и свободные члены – интервалы. Согласно интервальному анализу (см. также главы 1, 2), произведение и сумма интервалов есть интервал. Поэтому выражения в (5), (6) при любых значениях неизвестных равны интервалам. Так что решение задачи (5)–(7) – это набор неизвестных интервалов $\widetilde{x}_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, удовлетворяющих условию неотрицательности (7), которому соответствует минимальное значение суммарного интервала в (5), при выполнении системы ограничений-неравенств между интервалами (6). Видим, что отыскание решения задачи (5)–(7) требует сравнения интервалов, выбора экстремального интервала и конструирования алгоритма такого сравнения и выбора экстремума. Эти три проблемы решены в главе 1, результаты которой мы используем здесь для нахождения условий существования решения задачи (5)–(7), структуры этого решения и алгоритма его отыскания. Также используем правила действий над интервалами из главы 2.

3. ДЕТЕРМИНИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Решим поставленную интервальную задачу (5)–(7) методом детерминизации, сведя ее к двум аналогичным детерминированным задачам (1)–(3). Назовем нижней (верхней) граничной задачей интервальной задачи (5)–(7) такую детерминированную транспортную задачу (1)–(3), которая получается из (5)–(7) заменой всех интервальных коэффициентов и неизвестных их нижними (верхними) границами. Таким образом, нижняя граничная задача имеет вид: определить минимум линейной функции

$$Q_1(X_1) \equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij1} x_{ij1} = \min, \tag{9}$$

при наличии линейных ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij1} \le b_{i1}, i = \overline{1,m}; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij1} \ge b'_{j1}, j = \overline{1,n}, \tag{10}$$

и дополнительном условии неотрицательности неизвестных

$$x_{ij1} \ge 0, i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}. \tag{11}$$

Верхняя граничная задача имеет вид: найти минимум линейной функции

$$Q_2(X_2) \equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij2} x_{ij2} = \min , \tag{12}$$

при наличии линейных ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij2} \le b_{i2}, i = \overline{1,m} ; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij2} \ge b'_{j2}, j = \overline{1,n} , \tag{13}$$

и дополнительном условии неотрицательности неизвестных

$$x_{ij2} \ge 0, i = \overline{1,m} ; \quad j = \overline{1,n} . \tag{14}$$

Сводимость интервальной транспортной задачи (5)–(7) к детерминированным транспортным задачам (1)–(3) определяется следующей теоремой.

Т е о р е м а 1. Для того чтобы интервальная матрица неизвестных $\widetilde{X} = [X_1, X_2]$, где $X_1 = \|x_{ij1}\|$ – минимальная, а $X_2 = \|x_{ij2}\|$ – максимальная детерминированные матрицы неизвестных, была решением интервальной транспортной задачи (5)–(7), необходимо и достаточно, чтобы ее нижняя граничная задача (9)–(11) имела решение X_1, а верхняя граничная задача (12)–(14) – решение X_2 и было выполнено неравенство

$$X_1 \le X_2 . \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно условиям задачи (5)–(7), все перемножаемые интервалы в (5) неотрицательны. Поэтому произведения интервалов в (5) можно раскрыть по первой формуле (3–8). В результате получим задачу (5)–(7) в эквивалентной форме

$$Q(\widetilde{X}) \equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} [c_{ij1} x_{ij1}, c_{ij2} x_{ij2}] = \min ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} [x_{ij1}, x_{ij2}] \le [b_{i1}, b_{i2}], i = \overline{1,m} ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} [x_{ij1}, x_{ij2}] \ge [b'_{j1}, b'_{j2}], j = \overline{1,n} ,$$

$$[x_{ij1}, x_{ij2}] \ge 0, i = \overline{1,m} ; \quad j = \overline{1,n} .$$

Или, после суммирования интервалов по правилу (2–2), в форме

$$\left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij1} x_{ij1}, \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij2} x_{ij2} \right] = \min , \tag{16}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{n} x_{ij1}, \sum_{j=1}^{n} x_{ij2} \right] \le [b_{i1}, b_{i2}], i = \overline{1,m} ,$$

$$\left[\sum_{i=1}^{m} x_{ij1}, \sum_{i=1}^{m} x_{ij2} \right] \ge [b'_{j1}, b'_{j2}], j = \overline{1,n} , \tag{17}$$

$$[x_{ij1}, x_{ij2}] \ge 0, i = \overline{1,m} ; \quad j = \overline{1,n} . \tag{18}$$

По правилу выбора экстремального интервала §§ 1–2, 1–3 условие (16) эквивалентно паре условий

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij1} x_{ij1} = \min , \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij2} x_{ij2} = \min . \tag{20}$$

Далее, по правилу сравнения интервалов § 1–2 условия (17) эквивалентны паре условий

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij1} \le b_{i1}, i = \overline{1,m} ; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij1} \ge b'_{j1}, j = \overline{1,n} , \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij2} \le b_{i2}, i = \overline{1,m} ; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij2} \ge b'_{j2}, j = \overline{1,n} . \tag{22}$$

Наконец, по определению неотрицательности интервалов условия (18) эквивалентны паре условий

$$x_{ij1} \ge 0, i = \overline{1,m} ; \quad j = \overline{1,n} , \tag{23}$$

$$x_{ij2} \ge 0, i = \overline{1,m} ; \quad j = \overline{1,n} . \tag{24}$$

Итак, интервальная транспортная задача (5)–(7) эквивалентна двухкритериальной задаче линейного программирования (19)–(24). В последней ограничения на неизвестные (21), (23) относятся только к критерию оптимизации (19), а ограничения на неизвестные (22), (24) – только к критерию оптимизации (20). Следовательно, интервальная транспортная задача (5)–(7) эквивалентна паре детерминированных однокритериальных задач линейного программирования (19), (21), (23) и (20), (22), (24). Обе они – детерминированные транспортные задачи вида (1)–(3), причем первая есть нижняя граничная задача (9)–(11) интервальной транспортной задачи (5)–(7), а вторая – ее верхняя граничная задача (12)–(14). Сравнив интервальную задачу (5)–(7) и эквивалентную ей пару детерминированных граничных задач (9)–(11) и (12)–(14), видим, что в интервальной матрице $\widetilde{X} = [X_1, X_2]$ детерминированные границы – матрицы $X_1 = \|x_{ij1}\|$ и $X_2 = \|x_{ij2}\|$ есть решения соответственно нижней (9)–(11) и верхней (12)–(14) граничных задач. Отсюда, учитывая, что нижняя граница X_1 любой интервальной матрицы всегда не превосходит ее верхней границы X_2, получаем утверждение теоремы.

Теорема 1 показывает, что нижняя (верхняя) граничная задача интервальной транспортной задачи (5)–(7) есть детерминированная транспортная задача, решение которой дает нижнюю (верхнюю) границу интервального решения $\widetilde{X} = [X_1, X_2]$ задачи (5)–(7).

4. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ И АЛГОРИТМ ЕГО ОТЫСКАНИЯ

Из теоремы 1 вытекает следующая теорема существования решения.

Т е о р е м а 2. Для того чтобы интервальная транспортная задача (3)–(7) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ее нижняя и верхняя граничные задачи имели решения X_1 и X_2, между которыми имеет место неравенство (15).

Теорема 2 дает условие существования решения интервальной транспортной задачи в терминах решений ее нижней и верхней граничных задач. Использование этого критерия существования решения требует предварительного решения обеих граничных задач, что не всегда удобно. Поэтому более удобен нижеследующий критерий существования решения интервальной транспортной задачи, выраженный частично в терминах параметров задачи.

Т е о р е м а 3. Для того чтобы интервальная транспортная задача (3)–(7) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы суммарная интервальная производительность была не меньше суммарной интервальной потребности, т. е. выполнялось неравенство

$$\sum_{i=1}^{m}\widetilde{b}_i \geq \sum_{j=1}^{n}\widetilde{b}'_j \,, \tag{25}$$

и, кроме того, выполнялось неравенство (15) между решениями граничных задач задачи (3)–(7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (4), для существования решения детерминированной транспортной задачи (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы суммарная детерминированная производительность была не меньше суммарной детерминированной потребности.

Применим этот критерий к нижней и верхней граничным задачам интервальной транспортной задачи (5)–(7). Получим, что для существования решения нижней граничной задачи (9)–(11) интервальной транспортной задачи (5)–(7) необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\sum_{i=1}^{m} b_{i1} \geq \sum_{j=1}^{n} b'_{j1} \,, \tag{26}$$

а для существования решения ее верхней граничной задачи (12)–(14) необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\sum_{i=1}^{m} b_{i2} \geq \sum_{j=1}^{n} b'_{j2} \,. \tag{27}$$

По правилу сравнения интервалов § 1–2 пара неравенств (26), (27) эквивалентна интервальному неравенству

$$\left[\sum_{i=1}^{m} b_{i1}, \sum_{i=1}^{m} b_{i2}\right] \geq \left[\sum_{j=1}^{n} b'_{j1}, \sum_{j=1}^{n} b'_{j2}\right], \tag{28}$$

которое, в свою очередь, по правилу суммирования интервалов (2–2) эквивалентно интервальному неравенству (25). Итак, для существования решений нижней и верхней граничных задач интервальной транспортной задачи (5)–(7) необходимо и достаточно выполнения неравенства (25). Заменив данным условием существования решений граничных задач требование их существования в теореме 2, получим теорему 3.

Теорема 3 позволяет проверять существование решения интервальной транспортной задачи (5)–(7) в два этапа, проверяя сначала выполнение неравенства (25), для чего не требуется решать граничные задачи, и лишь после установления выполнения неравенства (25) решая две граничные задачи. Благодаря этому во всех случаях, когда хотя бы одна граничная задача не имеет решения, необходимость выполнения наиболее трудоемкого второго этапа отпадает.

Из теорем 1–3 получаем следующий алгоритм отыскания решения интервальной транспортной задачи (5)–(7).

Шаг 1. Проверка выполнения интервального неравенства (25) [или, что то же самое, неравенства (28)]. Если выполнено, то переход к шагу 2. Если не выполнено, то искомое решение задачи (5)–(7) не существует, и процедура окончена.

Шаг 2. Отыскание решения $X_1 = \|x_{ij1}\|$ нижней граничной задачи задачи (5)–(7), с использованием какого-либо известного метода решения детерминированных транспортных задач, например, распределительного или метода потенциалов.

Шаг 3. Отыскание решения $X_2 = \|x_{ij2}\|$ верхней граничной задачи задачи (5)–(7), с использованием тех же методов, что и на шаге 2.

Шаг 4. Проверка выполнения неравенства (15). Если выполнено, то решение задачи (5)–(7) существует, переход к шагу 5. Если не выполнено, то решение не существует, и конец процедуры.

Шаг 5. Искомое решение $\widetilde{X}$ интервальной транспортной задачи (5)–(7) составляется из найденных решений $X_1 = \|x_{ij1}\|$ и $X_2 = \|x_{ij2}\|$ ее нижней и верхней граничных задач по правилу

$$\widetilde{X} = [X_1, X_2] = \|x_{ij1}, x_{ij2}\|. \tag{29}$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в главе результаты показывают, что разработанный метод сравнения интервалов и выбора оптимального интервала, первоначально предназначавшийся для решения недетерминированных задач дискретного программирования, может быть применен также к решению недетерминированных непрерывных задач математического программирования. При этом сохраняется основное преимущество метода – возможность сведения недетерминированной (интервальной) оптимизационной задачи к двум детерминированным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левин В.И.* Интервальный подход к оптимизации в условиях неопределенности // Информационные технологии. 1999. № 1. С. 7-12.
2. *Юдин Д.Б. Гольдштейн Е.Г.* Задачи и методы линейного программирования. М.: Советское радио, 1964. 736 с.
3. *Алефельд Г. Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 360 с.
4. *Левин В.И.* Интервальная модель общей задачи линейного программирования. I, II // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и технич. науки. Тамбов, 1998. Т. 3. Вып. 4. С. 401-407; 1999. Т. 4. Вып. 3. С. 305-311.
5. *Левин В.И.* Транспортная задача линейного программирования с интервальными параметрами // Вестн. ТГУ. Сер. Естеств. и технич. науки. Тамбов, 1999. Т. 4. Вып. 3. С. 311-316.

Поступила в редакцию 23 октября 2001 г.