

УДК 517.988.6

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

© С.Е. Жуковский

Ключевые слова: накрывающее отображение, оператор Немыцкого.

В данной работе получены достаточные условия сюръективности оператора Немыцкого, действующего из пространства непрерывных функций в пространство непрерывных функций. Приведен пример, подтверждающий недостаточность данных условий для накрываемости оператора Немыцкого.

Пусть $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ – метрическое пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой $\rho_C(x, \tilde{x}) = \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - \tilde{x}(t)|$. Для непрерывной функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ определим равенством

$$(N_f x)(t) = f(x(t)) \quad \forall x \in C([a, b], \mathbb{R}^n) \quad (1)$$

оператор Немыцкого $N_f: C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R})$. Далее мы сформулируем некоторые свойства оператора N_f в предположении накрываемости функции f .

Напомним, что отображение F метрического пространства (X, ρ_X) в (Y, ρ_Y) называется α -накрывающим, если

$$\forall y \in Y, x_0 \in X \quad \exists x \in X: F(x) = y \text{ и } \rho_X(x, x_0) \leq \alpha^{-1} \rho_Y(y, F(x_0)),$$

здесь α – некоторое положительное число. Очевидно, что каждое накрывающее отображение сюръективно. Обратное неверно.

Отметим, что накрывающие отображения подробно изучены в [1–5] и имеют многочисленные приложения (см, например, [6]).

У т в е р ж д е н и е. Если функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной и α -накрывающей для некоторого $\alpha > 0$, то оператор N_f сюръективен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для произвольного отрезка $[p, q]$ существует непрерывная функция $\varphi \in C([p, q], \mathbb{R}^n)$ такая, что $f(\varphi(y)) \equiv y$.

Для каждого натурального m разобьем отрезок $[p, q]$ точками $y_k^m = p + k(q - p)m^{-1}$, $k = \overline{0, m}$. В силу сюръективности f существует $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ такое, что $f(\tilde{x}) = p$. Положим $x_0^m = \tilde{x}$. В силу накрываемости f

$$\exists x_1^m \in \mathbb{R}^n: f(x_1^m) = y_1^m \text{ и } |x_0^m - x_1^m| \leq \alpha^{-1} |y_0^m - y_1^m|,$$

$$\exists x_2^m \in \mathbb{R}^n: f(x_2^m) = y_2^m \text{ и } |x_1^m - x_2^m| \leq \alpha^{-1} |y_1^m - y_2^m|,$$

...

$$\exists x_m^m \in \mathbb{R}^n: f(x_m^m) = y_m^m \text{ и } |x_{m-1}^m - x_m^m| \leq \alpha^{-1} |y_{m-1}^m - y_m^m|.$$

Зададим функцию $\varphi^m : [p, q] \rightarrow \mathbb{R}^n$ так, чтобы ее график являлся ломаной, соединяющей точки (y_k^m, x_k^m) , $k = \overline{0, m}$. Очевидно, что заданная таким образом функция φ^m удовлетворяет следующим свойствам:

$$\varphi^m(y_k^m) = x_k^m, \quad k = \overline{0, m}; \quad (2)$$

$$|\varphi^m(y) - \varphi^m(\tilde{y})| \leq \alpha^{-1}|y - \tilde{y}|, \quad |\varphi^m(y)| \leq \alpha^{-1}(q - p) + |\tilde{x}| \quad \forall y, \tilde{y} \in [p, q]. \quad (3)$$

Из (3) следует, что семейство непрерывных функций $\{\varphi^m : m = 1, 2, \dots\}$ равномерно ограничено и равномерно непрерывно. Согласно теореме Арцела (см. [7]), множество $\{\varphi^m : m = 1, 2, \dots\}$ предкомпактно в $C([p, q], \mathbb{R}^n)$, а значит имеет предельную точку $\varphi \in C([p, q], \mathbb{R}^n)$. Не теряя общности, будем считать, что $\varphi_m \rightarrow \varphi$ при $m \rightarrow \infty$. Переходя в (2) к пределу при $m \rightarrow \infty$, имеем: $f(\varphi(y)) \equiv y$.

Докажем сюръективность N_f , т. е. покажем, что

$$\forall y \in C([a, b], \mathbb{R}) \quad \exists x \in C([a, b], \mathbb{R}^n) : N_f(x) = y.$$

Для произвольного $y \in C([a, b], \mathbb{R})$ в силу теоремы Вейерштрасса существуют $p, q \in \mathbb{R}$ такие, что $y(t) \in [p, q]$ для любого $t \in [a, b]$. Выше мы доказали, что для данного отрезка $[p, q]$ существует непрерывная функция $\varphi : [p, q] \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что $f(\varphi(y)) \equiv y$. Рассмотрим функцию $x(\cdot) = \varphi(y(\cdot))$. Очевидно, что она определена на всем $[a, b]$, непрерывна и $N_f(x) = y$. Утверждение доказано.

Отметим, что в данном утверждении условие накрывания функции f существенно. Так, например, из сюръективности f не следует сюръективность N_f . Проиллюстрируем это следующим примером.

Пример 1. Положим $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leq 0; \\ 0 & \text{при } x \in [0, 1]; \\ x - 1 & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

Функция f , очевидно, сюръективна, непрерывна и не является накрывающей, поскольку $f(x) \equiv \text{const}$ при $x \in [0, 1]$.

Рассмотрим уравнение $N_f(x) = y$. Здесь оператор N_f определен по формуле (1), $y(t) = t$ при всех $t \in \mathbb{R}$. В силу сюръективности f для каждого $t \in \mathbb{R}$ найдется число $x(t) \in \mathbb{R}$ такое, что $f(x(t)) = t$. Однако никакая функция $x(\cdot)$ такая, что $N_f(x) = y$, не является непрерывной. Действительно, $\lim_{t \rightarrow -0} x(t) = 0$, но $\lim_{t \rightarrow +0} x(t) = 1$. Таким образом, $y(\cdot) \notin N_f(C(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$, поэтому оператор N_f не является сюръективным.

Зададимся следующим вопросом. Верно ли, что из накрываемости f следует накрываемость N_f . Отметим, что ответ на этот вопрос положителен, если N_f определен по формуле (1) на пространстве существенно ограниченных функций $L_\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ и действует в $L_\infty([a, b], \mathbb{R})$. Последнее напрямую следует из леммы 2 работы [6]. Однако в случае, когда $N_f : C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R})$, из накрываемости f не следует накрываемость N_f . Проиллюстрируем это следующим примером.

Пример 2. Положим:

$$f(x) \equiv |x^1| - |x^2|, \quad x = (x^1, x^2).$$

Функция $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ является 1-накрывающей. Действительно, для произвольных $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$ и y положим $x = ((y + |x_0^2|)\text{sign}(x_0^1), x_0^2)$ при $y \geq 0$, $x = (x_0^1, (-y + |x_0^1|)\text{sign}(x_0^2))$ при $y < 0$. Тогда, очевидно, $f(x) = y$ и $|x - x_0| = |y - f(x_0)|$.

Покажем, что для заданной функции f оператор Немыцкого $N_f : C([-1, 1], \mathbb{R}^2) \rightarrow C([-1, 1], \mathbb{R})$ не является α -накрывающим ни при каком $\alpha > 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $y_\varepsilon(t) \equiv \varepsilon$, $x_0(t) \equiv (t, t)$. Рассмотрим уравнение

$$N_f(x) = y_\varepsilon$$

с неизвестным $x \in C([-1, 1], \mathbb{R}^2)$. Множество решений этого уравнения содержит только функции вида $x(t) \equiv (\varepsilon + |\xi(t)|, \xi(t))$ либо $x(t) \equiv (-\varepsilon - |\xi(t)|, \xi(t))$, здесь $\xi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная непрерывная функция. Если $x(t) \equiv (\varepsilon + |\xi(t)|, \xi(t))$, то

$$\begin{aligned} \rho_C(x, x^0) &= \sup_{t \in [-1, 1]} \left| (t, t) - (\varepsilon + |\xi(t)|, \xi(t)) \right| \geq \left| (-1, -1) - (\varepsilon + |\xi(-1)|, \xi(-1)) \right| = \\ &= \left| (-1 - \varepsilon - |\xi(-1)|, -1 - \xi(-1)) \right| \geq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

В случае, когда $x(t) \equiv (-\varepsilon - |\xi(t)|, \xi(t))$, аналогично получим $\rho_C(x, x^0) \geq \sqrt{2}$. Таким образом, $\rho_C(x, x^0) \geq \sqrt{2}$ для любого решения x уравнения $N_f(x) = y_\varepsilon$, а $\rho_C(N_f(x_0), y_\varepsilon) = \varepsilon$. Следовательно, для любого $\alpha > 0$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\alpha \rho_C(x, x_0) > \rho_C(y_\varepsilon, N_f(x_0))$ для любого $x : N_f(x) = y_\varepsilon$. Поэтому N_f не является α -накрывающим оператором ни при каком $\alpha > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mordukhovich B.S.* Variational Analysis and Generalized Differentiation. V. 1. Springer, 2005.
2. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151-155.
3. *Арутюнов А.В.* Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Мат. заметки. 2009. Т. 86. № 2. С. 163-169.
4. *Arutyunov A.V., Avakov E.R., Gel'man B.D., Dmitruk A.V., Obukhovskii V.V.* Locally Covering Maps in Metric Spaces and Coincidence Points // J. of Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. № 1. P. 106-127.
5. *Дмитрук А.В., Милотин А.А., Осмоловский Н.П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35. № 6. С. 11-46.
6. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613-634.
7. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. С. 110.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента Российской Федерации (МК-119.2009.1); РФФИ (гранты № 09-01-97503, № 09-01-00619); АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)» (проект № 2.1.1/1131); ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы» (государственные контракты № П688, № 14.740.11.0349).

Поступила в редакцию 20 августа 2010 г.

Zhukovskiy S. E. On a class of surjective mappings in the continuous functions spaces.

Sufficient condition of Nemytskii's mapping to be a surjection in the continuous functions spaces is obtained. An example which shows that this condition is not sufficient for Nemytskii's mapping to have covering property is presented.

Key words: covering mappings; Nemytskii's mappings.