УДК 517.9

АППРОКСИМАЦИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ВЛОЖЕНИЕМ В СРЕДНЕМ

© А.И. Булгаков, О.П. Беляева, А.И. Коробко

Bulgakov A.I., Belyayeva O.P., Korobko A.I. Approximation of a disturbed inclusion by the mean embedding. In The article looks in retrospect at the previously published material [1-4] which studied a disturbed inclusion with external disturbances such as map $\Delta : [a, b] \times C^n[a, b] \to \mathrm{comp}[R^n]$ generating a map with switching convex images satisfies the Karatheodory conditions. Similar disturbances occur in applications since they characterise the error of value computation for corresponding maps. This article studies disturbed inclusions where map Δ is integrally continuous.

В работах [1–4] исследованы возмущенные включения с внешними возмущениями, у которых многозначное отображение $\Delta : [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[R^n]$, порождающее многозначное отображение с выпуклыми по переключению образами (определение см. ниже), удовлетворяет условиям Каратеодори. Такие возмущения в приложениях имеют место, поскольку они характеризуют погрешность вычислений значений соответствующих многозначных отображений. Как доказано в [1–4], этими возмущениями нельзя пренебрегать, так как они могут вызвать значительные изменения множества решения возмущенного включения. В данной работе исследуется возмущенное включение в случае, когда отображение $\Delta : [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[R^n]$, интегрально непрерывно (определение см. ниже).

Пусть X - линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_X$. Обозначим $B_X[x,\epsilon]$ - открытый шар пространства X с центром в точке $x \in X$ и радиусом $\epsilon > 0$, если $\epsilon = 0$, то $B_X[x,0] \equiv x$. Пусть $U \subset X$. Тогда $\overline{U}$ - замыкание множества U; $\mathrm{co}U$ - выпуклая оболочка множества U; $\overline{\mathrm{co}}U = \overline{\mathrm{co}U}$; $\|U\|_X = \sup\limits_{x\in U} \|u\|_X$; $\Omega(U)$ - множество всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств множества U; $U^\epsilon \equiv \bigcup\limits_{u\in U} B[u,\epsilon]$, если $\epsilon > 0$, и $U^0 \equiv \overline{U}$; $\rho_X[x,U]$ - расстояние от точки $x \in X$ до множества U в пространстве X; $h_X[\cdot;\cdot]$ - расстояние по Хаусдорфу в пространстве X соответствующих множеств; $\mathrm{comp}[X]$ $(\mathrm{cl}[X])$ - множество всех непустых компактов (всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств) пространства X.

Пусть R^n - n-мерное пространство вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$. Обозначим $C^n[a,b]$, $(L^n[a,b])$ пространство непрерывных (суммируемых по Лебегу) функций $x : [a,b] \to R^n$ с нормой $\|x\|_{C^n[a,b]} = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$ $(\|x\|_{L^n[a,b]} = \int\limits_a^b |x(s)|ds)$.

Пусть $\Phi \subset L^n[a,b]$. Будем говорить, что множество Φ *выпукло по переключению*, если для любых $x,y \in \Phi$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполняется включение $\chi(\mathcal{U})x + \chi([a,b]\backslash\mathcal{U})y \in \Phi$, где $\chi(\cdot)$ - характеристическая функция соответствующего множества. Обозначим через $\Pi[L^n[a,b]]$ множество всех ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножетв пространства $L^n[a,b]$.

Измеримость однозначных функций везде понимается здесь по Лебегу, измеримость многозначных функций понимается в смысле [5].

Если $X = R^n$, то в этом случае для сокращения записи индекс R^n в обозначении расстояний опускаем.

Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V\Phi(x), \qquad (1)$$

где $\Psi : C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[C^n[a,b]]$, $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ - многозначные отображения, линейный непрерывный интегральный оператор

$$V : L^n[a,b] \to C^n[a,b]$$

определен равенством

$$(Vz)(t) = \int\limits_a^b V(t,s)z(s)ds, t \in [a,b]. \qquad (2)$$

Включение (1) назовем *возмущенным включением.*

Под *решением включения* (1) будем понимать элемент $x \in C^n[a,b]$, удовлетворяющий (1). Таким образом, непрерывная функция $x:[a,b] \to R^n$ является решением включения (1) тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы $v \in \Psi(x)$ и $z \in \Phi(x)$, что справедливо равенство $x = v + Vz$.

Аналогично [3] будем говорить, что функция $x \in C^n[a,b]$ является *квазирешением включения* (1), если найдется такой элемент $v \in \Psi(x)$ и такая последовательность

$$z_i \in \Phi(x),\ i = 1,2,..., \tag{3}$$

что последовательность $x_i = v + Vz_i \to x$ в $C^n[a,b]$ при $i \to \infty$. Обозначим $\mathcal{H}$ множество всех квазирешений включения (1).

Далее будем считать, что если x - квазирешение включения (1) и $x \in U \subset C^n[a,b]$, то найдется такой элемент $v \in \Psi(x)$ и такая последовательность $z_i \in L^n[a,b]$, $i = 1,2,\dots$, удовлетворяющая включению (3), что для любого $i = 1,2,...$ выполняется включение $x_i = v + Vz_i \in U$ и $x_i \to x$ в $C^n[a,b]$ при $i \to \infty$.

Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V\overline{\text{co}}\Phi(x). \tag{4}$$

Включение (4) по аналогии с [3] будем называть *"овыпукленным"* возмущенным включением. Пусть H_{co} - множество решений включения (4).

Аналогично [3] доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть линейный непрерывный оператор* $V : L^n[a,b] \to C^n[a,b]$, *определенный равенством (2), переводит каждое слабо компактное в* $L^n[a,b]$ *множество в предкомпактное множество пространства* $C^n[a,b]$. *Тогда справедливо равенство* $H_{\text{co}} = \mathcal{H}$.

Пусть многозначное отображение $\Delta : [a,b] \times C^n[a,b] \to \text{comp}[R^n]$, обладает свойством: при каждом фиксированном $x \in C^n[a,b]$ отображение $\Delta(\cdot,x)$ измеримо и удовлетворяет при почти всех $t \in [a,b]$ равенству

$$\Phi(x) = \{y \in L^n[a,b] : y(t) \in \Delta(t,x)\}. \tag{5}$$

Такое отображение существует и для любого $x \in C^n[a,b]$ многозначное отображение $\Delta(\cdot,x) : [a,b] \to \text{comp}[R^n]$ ограничено суммируемой функцией (см. [6]). По аналогии с оператором Немыцкого отображение $\Delta : [a,b] \times C^n[a,b] \to \text{comp}[R^n]$, определенное равенством (5), будем называть *отображением, порождающим оператор* $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$.

Будем говорить, что многозначное отображение $\Delta : [a,b] \times C^n[a,b] \to \text{comp}[R^n]$ является *интегрально непрерывным (непрерывным в среднем)* в точке $x \in C^n[a,b]$, если для любой последовательности $x_i \in C^n[a,b]$, $i = 1,2,...$, сходящейся к x в пространстве $C^n[a,b]$ при $i \to \infty$ выполняется равенство

$$\lim_{i\to\infty} \int_a^b h[\Delta(t,x_i);\Delta(t,x)]dt = 0.$$

Отображение $\Delta : [a,b] \times C^n[a,b] \to \text{comp}[R^n]$ назовем *интегрально непрерывным (непрерывным в среднем) на пространстве* $C^n[a,b]$, если оно интегрально непрерывно (непрерывно в среднем)в каждой точке $x \in C^n[a,b]$.

Отметим, что отображение $\Delta : [a,b] \times C^n[a,b] \to \text{comp}[R^n]$ интегрально непрерывно в том и только в том случае, когда отображение $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ непрерывно (см. [4]).

Обозначим через $P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$ множество всех непрерывных функций $\omega : C^n[a,b] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, для которых для любого $x \in C^n[a,b]$ справедливо соотношение $\omega(x,0) = 0$ и любых $(x,\delta) \in C^n[a,b] \times (0,\infty)$ выполняется неравенство $\omega(x,\delta) > 0$.

Рассмотрим оператор $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ и порождающее его отображение $\Delta : [a,b] \times C^n[a,b] \to \text{comp}[R^n]$. Значения отображения $\Phi(\cdot)$, а, следовательно, и образы оператора $\Delta : [a,b] \times C^n[a,b] \to \text{comp}[R^n]$ могут вычисляться с некоторой степенью точности. Пусть точность вычисления значения оператора $\Phi(\cdot)$ определяется функцией $\eta(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$. В связи с этим рассмотрим отображение $\Phi_\eta : C^n[a,b] \to \text{cl}[L^n[a,b]]$, заданное равенством

$$\Phi_\eta(x,\delta) = (\Phi(x))^{\eta(x,\delta)}, \tag{6}$$

где функция $\eta(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$ в каждой точке $x \in C^n[a,b]$ при каждом фиксированном $\delta \in [0,\infty)$ определяет погрешность вычисления значения отображения $\Phi(\cdot)$. Далее, $\eta(\cdot,\cdot)$ будем называть *радиусом внешних возмущений отображения* $\Phi(\cdot)$ или просто *радиусом внешних возмущений.* Из равенства (6) вытекает, что

$$h_{L^n[a,b]}[\Phi(x);\Phi_\eta(x)] = \eta(x,\delta). \tag{7}$$

Поэтому из равенства (7) следует соотношение

$$\lim_{\delta\to 0+0} h_{L^n[a,b]}[\Phi(x);\Phi_\eta(x)] = 0.$$

Таким образом, все отображения $\Phi_\eta : C^n[a,b] \to \mathrm{cl}[L^n[a,b]]$, имеющие вид (6) и зависящие от радиуса внешних возмущений $\eta(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$, близки в смысле равенства (7) к отображению $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$. Это приближение оператора $\Phi(\cdot)$ будем называть *аппроксимацией вложением в среднем* или *просто аппроксимацией в среднем.* Само отображение $\Phi_\eta : C^n[a,b] \to \mathrm{cl}[L^n[a,b]]$ будем называть *аппроксимирующим оператор* $\Phi(\cdot)$ *вложением в среднем или просто аппроксимирующим.*

Пусть U непустое выпуклое замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$ и пусть $\omega(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$. Рассмотрим многозначное отображение $M_U(\omega)(x,\delta) : U \times [0,\infty) \to \Omega(U)$, определенное равенством

$$M_U(\omega)(x,\delta) = \overline{B_{C^n[a,b]}[x,\omega(x,\delta)]} \cap U. \qquad (8)$$

Лемма 1. *Пусть U - непустое выпуклое замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$ и пусть $\omega(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty])$. Тогда многозначное отображение $M_U(\omega)(x,\delta) : U \times [0,\infty) \to \Omega(U)$, заданное соотношением (8), непрерывно по Хаусдорфу.*

Определим отображение $\varphi_U(\omega) : U \times [0,\infty) \to \Omega(U)$ соотношением

$$\varphi_U(\omega)(x,\delta) = \sup_{y \in M_U(\omega)(x,\delta)} h_{L^n[a,b]}[\Phi(x);\Phi(y)], \qquad (9)$$

где отображение

$$M_U(\omega)(x,\delta) : U \times [0,\infty) \to \Omega(U)$$

задано равенством (8).

Значение функции $\varphi_U(\omega)(\cdot,\cdot)$ в точке $(x,\delta) \in U \times [0,\infty)$ назовем *модулем непрерывности отображения*

$$\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$$

в точке $x \in C^n[a,b]$ *на множестве* $U \subset C^n[a,b]$, функцию $\omega(\cdot,\cdot)$ - *функцией радиуса модуля непрерывности или просто радиусом непрерывности*, а саму функцию $\varphi_U(\omega)(\cdot,\cdot)$ - *функцией модуля непрерывности или просто модулем непрерывности отображения* $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ *на множестве U относительно радиуса непрерывности* $\omega(\cdot,\cdot)$.

Лемма 2. *Пусть U - непустое выпуклое компактное множество пространства $C^n[a,b]$ и пусть $\omega(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty])$. Далее, пусть отображение $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ непрерывно. Тогда отображение $\varphi_U(\omega) : U \times [0,\infty) \to \Omega(U)$, заданное равенством (9), непрерывно на $U \times [0,\infty)$ и для любого $x \in U$ выполняется соотношение*

$$\lim_{\substack{z \to x \\ \delta \to 0+0}} \varphi_U(z,\delta) = 0.$$

Замечание 1. Если известно отображение $\Delta : [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[R^n]$, порождающее оператор $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$, то аналогично можно определить средний (интегральный) модуль непрерывности $\widetilde{\varphi}_U(\omega) : U \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ этого отображения с помощью равенства

$$\widetilde{\varphi}_U(\omega)(x,\delta) = \sup_{y \in M_U(\omega)(x,\delta)} \int_a^b h[\Delta(t,x);\Delta(t,y)]dt.$$

При этом модуль непрерывности оператора $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ и средний модуль непрерывности отображения $\Delta : [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[R^n]$ для любого $(x,\delta) \in U \times [0,\infty)$ удовлетворяет соотношениям (см.[4])

$$\varphi_U(\omega)(x,\delta) \le \widetilde{\varphi}_U(\omega)(x,\delta) \le 2\varphi_U(\omega)(x,\delta).$$

Пусть U - непустое замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$. Будем говорить, что *функция* $\eta(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$ *равномерно на множестве* $U \subset C^n[a,b]$ *оценивает сверху относительно радиуса непрерывности* $\omega(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$ *модуль непрерывности отображения* $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi L^n[a,b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при все $x \in U$ и $\delta \in [0,\delta(\varepsilon))$ выполняется оценка

$$\varphi_U(\omega)(x,\delta) \le \eta(x,\varepsilon),$$

где отображение $\varphi_U(\omega) : U \times [0,\infty) \to \Omega(U)$ определено соотношением (9).

Лемма 3. *Пусть U - непустое выпуклое компактное множество пространства $C^n[a,b]$ и пусть $\omega(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$. Далее, пусть отображение $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ непрерывно. Тогда найдется функция $\eta(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$, которая равномерно на множестве $U \subset C^n[a,b]$ оценивает сверху относительно радиуса непрерывности $\omega(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$, модуль непрерывности отображения $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$.*

Пусть $\eta(\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$. Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ для каждого $\delta > 0$ включение

$$x \in (\Psi(x))^{\xi(x,\delta)} + V\Phi_\eta(x,\delta), \qquad (10)$$

где отображение $\Phi_\eta : C^n[a,b] \times [0,\infty) \to \to \mathrm{cl}[L^n[a,b]]$ задано соотношением (6).

Далее, будем предполагать, что отображения $\Psi : C^n[a,b] \to \mathrm{comp}[C^n[a,b]]$, $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$ непрерывны по Хаусдорфу, линейный непрерывный интегральный оператор $V : L^n[a,b] \to C^n[a,b]$, заданный равенством (2), переводит каждое слабо компактное в $L^n[a,b]$ множество в предкомпактное множество пространства $C^n[a,b]$.

Каждое решение включения (10) при фиксированном $\delta > 0$ будем называть *$\delta-$ решением включения* (1). Обозначим через $H_{\xi(\delta),\eta(\delta)}(U)$ - множество всех $\delta-$ решений включения (1), принадлежащих множеству $U \subset C^n[a,b]$. Обозначим множества решений включений (1) и (4), принадлежащих множеству $U \subset C^n[a,b]$, через $H(U)$ и $H_{\mathrm{co}}(U)$, соответственно.

Теорема 2. *Пусть U - непустое замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$ и $\xi(\cdot,\cdot)$, $\omega(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$. Тогда для любой функции $\eta(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times \times [0,\infty))$, равномерно на множестве $U \subset \subset C^n[a,b]$ оценивающей сверху относительно радиуса непрерывности $\omega(\cdot,\cdot), \in P(C^n[a,b] \times \times [0,\infty))$ модуль непрерывности отображения $\Phi : C^n[a,b] \to \Pi[L^n[a,b]]$, справедливо равенство*

$$H_{\mathrm{co}}(U) = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\xi(\delta),\eta(\delta)}(U)},$$

где $\overline{H_{\xi(\delta),\eta(\delta)}(U)}$ - замыкание множества $H_{\xi(\delta),\eta(\delta)}(U)$ в пространстве $C^n[a,b]$.

Замечание 2. Отметим, что дифференцильные включения являются частным случаем возмущенных включений. А так как для дифференциальных включений равенство $\overline{H(U)} = H_{\mathrm{co}}(U)$ ($\overline{H(U)}-$ замыкание множества $H(U)$ в пространстве $C^n[a,b]$) может не выполняться (см. пример [7, 8]), то из теоремы 2 следует, что соотношение

$$\overline{\bigcap_{\delta>0} H_{\xi(\delta),\eta(\delta)}(U)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\xi(\delta),\eta(\delta)}(U)}$$

может при некоторых $\eta(\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times \times [0,\infty))$ не иметь места.

Пусть $U \subset C^n[a,b]$. По аналогии с [11], будем говорить, что для включения (1) выполняется *принцип плотности (условие плотности)*, если справедливо равенство

$$\overline{H(U)} = H_{\mathrm{co}}(U). \tag{11}$$

Замечание 3. Как было отмечено выше, принцип плотности не всегда выполняется. Это доказывает пример Плиса (A. Plis) (см. [7,8]). Первые достаточные условия, когда выполняется равенство (11) для задачи Коши диффференциального включения получены А.Ф. Филипповым (см. [8,12,13]), а для периодических решений и для краевых задач эти условия получены в работах [14,1-4,6,15].

Теорема 3. *Пусть $\xi(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times \times [0,\infty))$. Если U - непустое замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$, то для выполнения равенства*

$$\overline{H(U)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\xi(\delta),\eta(\delta)}(U)} \tag{12}$$

для любого радиуса внешних возмущений $\eta(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$ достаточно, а если $U-$ непустое выпуклое компактное множество, то и необходимо выполнение принципа плотности на множестве $U \subset C^n[a,b]$.

Замечание 4. Отметим, что выполнение равенства (12) для любых внешних возмущений $\eta(\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b] \times [0,\infty))$ является свойством устойчивости множества решений $H(U)$ включения (1) относительно этих возмущений (см. [16]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Некоторые результаты по теории возмущений многозначных операторов с выпуклыми замкнутыми значениями отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и их приложения //Вестн.Тамб.ГУ. Сер.: естеств. и технич. науки. Тамбов, 1997. Т.2. Вып.2. С.111-120.
2. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Асимптотическое представление множеств $\delta-$ решений включения типа Гаммерштейна //Вестн. Тамб.ГУ "Сер.: естеств. и технич. науки."Тамбов, 1997. Т.2. Вып.3. С.294-298.
3. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений //Матем. сб. 1998. Т.189, №6. С.3-32.
4. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Возмущение однозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами //Изв. вузов. Мат. 1999, №3. С.3-16.
5. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480с.
6. *Булгаков А.И.* Интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения к краевым задачам дифференциальных включений //Матем. сб. 1992. Т.183, №10. С.63-86.
7. *Plis A.* Traejectories and quasitraejectories of an orientor field //Bull. Acad. Polon. Sei, Ser. math., astron., phis. 1963. V.11. №6. P.369-370.
8. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
9. *Арутюнов А.В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: "Факториал", 1997. 254с.

10. *Арутюнов А.В., Асеев С.М., Благодатских В.И.* Необходимые условия первого порядка в задаче оптимального управления дифференциальным включением с фазовыми ограничениями //Матем. сб., 1993. Т.184, №6. С.3-32.
11. *Булгаков А.И., Скоморохов В.В.* Аппроксимация дифференциальных включений //Матем сб. 2002. Т.193. №2. С.35-52.
12. *Филиппов А.Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью //Вестн. МГУ. Сер.1. Матем., механ. 1967. №3. С.16-26.
13. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление //Тр. МИАН СССР, 1985. Т.169. С.194-252.
14. *Ирисов А.Е., Тонков Е.П.* О замыкании множества периодических решений дифференциального включения //В сб. "Дифференц. и интеграл. уравнения"Горький: Изд-во ГГУ, 1983. С.32-38.
15. *Булгаков А.И.* Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения. I,II,III //Дифференц. уравнения, 1992. Т.28, №3. С.371-379; Дифференц уравнения, 1992. Т.28, №4. С.566-571; Дифференц. уравнения, 1992. Т.28, №5. С.739-746.
16. *Булгаков А.И., Ефремов А.А., Панасенко Е.А.* К вопросу устойчивости дифференциальных включений //Вестн. Тамб.ГУ. Сер.: естеств. и техн. науки. 1999. Т.4, вып.4 С.461-470.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 01-01-00140; № 04-01-00324), Министерства Образования РФ (грант № Е02-1.0-212)

Поступила в редакцию 11 февраля 2004 г.