ISSN 1810-0198. Вестник ТГУ, т. 16, вып. 4, 2011

УДК 517.929

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ НА ОТРЕЗКЕ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПОЛУОСИ

© П.Г. Сурков

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием; некорректные задачи; асимптотические методы.

Для автономной системы линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием найдены асимптотические формулы, определяющие аналитические зависимости регуляризованных решений этой системы на конечном отрезке отрицательной полуоси. Задача решена с условием необходимой гладкости начальных функций, но при нарушении условий, обеспечивающих непрерывное продолжение решений этой системы на отрезок отрицательной полуоси.

Рассматривается линейная автономная система дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-r), \quad t \in \mathbb{R}^- = (-\infty, 0], \tag{1}$$

где $x\colon \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^n$, $r > 0$, A и B — постоянные $n \times n$ матрицы, $\det B \neq 0$.

Для начального момента $t_0 = 0$ и произвольной начальной функции $\varphi \in C = C\big([-r,0], \mathbb{R}^n\big)$ система (1) имеет единственное решение $x(\cdot,\varphi)$ на полуоси $(-r,\infty)$, удовлетворяющее условию $x(t,\varphi) = \varphi(t)$, $t \in [-r,0]$ и непрерывно зависящее от начальной функции. Решение системы (1) на любом отрезке положительной полуоси можно построить, используя процедуру метода шагов [1].

Задача нахождения решений системы (1) на отрицательной полуоси заменяется обратной задачей построения решений в сторону возрастания времени, как было предложено в работе [2]. Используя процедуру метода шагов в сепарабельном гильбертовом пространстве $H = L_2\big([-r,0],\mathbb{R}^n\big) \times \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(\varphi,\psi) = \psi^\top(0)\varphi(0) + \int_{-r}^0 \psi^\top(s)\varphi(s)ds$, получаем уравнения вида

$$Ux^k = x^{k+1}, \quad k \leqslant -1.$$

Здесь линейный оператор U определяется формулами

$$(U\varphi)(t) = \begin{cases} \exp\big(A(t+\Delta)\big)\varphi(0) + \displaystyle\int_{-\Delta}^{t} \exp\big(A(t-s)\big)B\varphi_m(s)\,ds, & t \in [-\Delta, 0], \\ \varphi(t+\Delta), \quad t \in [-r,-\Delta), \end{cases}$$

где $\varphi_m(\theta) = \varphi\big(\theta - (m-1)\Delta\big)$, $\theta \in [-r,0]$, $\Delta > 0$, $m\Delta = r$, $m \in \mathbb{N}$. Последние задачи являются некорректными, и для их решения используется метод регуляризации А.Н. Тихонова [3]. Так как выполнено условие

$$\|Ux - \varphi\|_H = \|Ux - \varphi\|_{H_\Delta},$$

то эти задачи допускают сужение на гильбертово пространство $H_\Delta = L_2\big([-\Delta,0],\mathbb{R}^n\big) \times \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(\varphi,\psi) = \psi^\top(0)\varphi(0) + \int_{-\Delta}^0 \psi^\top(s)\varphi(s)\,ds$. Поэтому выбираем стабилизирующий функционал вида

$$\Omega[x] = x^\top(0)Gx(0) + \int_{-\Delta}^{0} \big(x^\top(s)Qx(s) + x'^\top(s)Px'(s)\big)\,ds, \quad x \in W_2^1[-\Delta,0],$$

где G, P, Q — положительно определённые матрицы. Для фиксированного значения параметра регуляризации $\alpha > 0$ будем искать элемент $x_\alpha \in W_2^1[-\Delta, 0]$, минимизирующий сглаживающий функционал

$$M^\alpha[\varphi, x] = \|Ux - \varphi\|_{H_\Delta} + \alpha\Omega[x], \quad x \in W_2^1[-\Delta, 0].$$

У т в е р ж д е н и е 1. *Пусть* $\det B \neq 0$. *Тогда минимизирующий элемент* x_α *является компонентой решения следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} x'' &= P^{-1}Qx + \alpha^{-1}P^{-1}\big(\psi - z(\theta)\big), \\ \psi' &= -(B^{-1}AB)^\top\psi - B^\top\chi, \\ \chi' &= A\chi + Bx \end{aligned} \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered} x'(-r) = 0, \quad \psi(-r) + \alpha B^\top\big(Gx(0) + Px'(0)\big) = z(-r), \\ \psi(0) = B^\top\chi(0), \quad x(0) = \varphi_m(-r). \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\varphi_m(\theta) \in H_\Delta$, *функция* z *является решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$z' = -(B^{-1}AB)^\top z - B^\top\varphi_1(\theta), \quad z(0) = B^\top\varphi(0),$$

α — *малый положительный параметр.*

Частный случай $m = 1$ полностью рассмотрен в работе [4]. Решение системы (2), (3) находится с использованием асимптотических методов для обыкновенных дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
2. *Долгий Ю.Ф., Путилова Е.Н.* Продолжение назад решений линейного дифференциального уравнения с запаздыванием как некорректная задача // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 8. С. 1317–1323.
3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
4. *Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г.* Асимптотика регуляризованных решений линейной автономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Проблемы динамического управления: Сб. науч. тр. фак. ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова. 2007. Вып. 2. С. 71–99.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН «Математическая теория управления», Урало-Сибирского междисциплинарного проекта и Программы поддержки ведущих научных школ НШ-65590.2010.1.

Surkov P.G. Regularization of an ill-posed Cauchy problem on an interval of negative half-line. For an autonomous system of linear retarded differential equations, we find asymptotic formulas analytically determining how the regularized solutions of this system on a interval of the negative half-line depends on the admissible error. The problem is solved in the following setting: additional smoothnes conditions are imposed on the initial functions, but the conditions providing a continuous extension of the solutions of this sysmet to an interval of negative half-line are violated.

Key words: retarded differential equation; ill-posed problems; asymptotic methods.

Сурков Платон Геннадьевич, Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, младший научный сотрудник, e-mail: platon.surkov@gmail.com.

УДК 517.977

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ В КОНСТРУКЦИЯХ СЕТОЧНОГО ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА

© Т. Б. Токманцев

Ключевые слова: задача оптимального управления; функция цены; оптимальный синтез; уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана; гамильтоновы дифференциальные включения.

Рассматривается задача оптимального управления с фиксированным моментом окончания. Качество управления оценивается с помощью терминально-интегрального функционала Больца. Рассматриваются обобщенные характеристики уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана — решения гамильтоновых дифференциальных включений. На базе обобщенных характеристик конструируется сеточный оптимальный синтез (оптимальное управление по принципу обратной связи [1]). Приводятся результаты численного решения модельных задач.

На фиксированном отрезке времени $[0,T]$ рассматривается управляемая система вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x,u), \tag{1}$$

где фазовый вектор системы $x \in \mathbb{R}^n$, на управление наложены геометрические ограничения $u \in P$, $P \subset \mathbb{R}^m$ — компакт. Введем множество $U(t_0,T)$, $t_0 \in [0,T]$ допустимых управлений — измеримых функций $u(\cdot)\colon [t_0,T] \mapsto P$. Траектория динамической системы (1), выходящая из начальной точки $(t_0,x_0) \in \operatorname{cl}\Pi_T$ под воздействием управления $u(\cdot) \in U(t_0,T)$, обозначается символом $x(\cdot) = x\big(\cdot;t_0,x_0,u(\cdot)\big)\colon [t_0,T] \mapsto \mathbb{R}^n$. Качество управления $u(\cdot)$ оценивается с помощью функционала Больца

$$I\big(t_0,x_0;u(\cdot)\big) = \sigma\Big(x\big(T;t_0,x_0,u(\cdot)\big)\Big) + \int\limits_{t_0}^{T} g\big(t,x(t),u(t)\big)\,dt \to \min_{u\in U(t_0,T)}. \tag{2}$$

Символами Π_T и $\operatorname{cl}\Pi_T$ обозначим полосы в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$: $\Pi_T = (0,T)\times\mathbb{R}^n$, $\operatorname{cl}\Pi_T = [0,T]\times\mathbb{R}^n$.

Задача рассматривается при следующих предположениях.

A_1'. Функции $f(t,x,u)$ и $g(t,x,u)$ в (1), (2) определены и непрерывны на $\operatorname{cl}\Pi_T\times P$, существуют непрерывные по $(t,x,u)\in\Pi_T\times P$ частные производные $\frac{\partial f_i(t,x,u)}{\partial x_j}$, $\frac{\partial g(t,x,u)}{\partial x_j}$, $i\in\overline{1,n}$, $j\in\overline{1,n}$, ограниченные константой $L_1>0$.

A_2'. Терминальная функция платы $\sigma(x)$ в (2) определена и непрерывна на $\mathbb{R}^n$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}$, $i\in\overline{1,n}$.

Введем функцию Гамильтона $H(t,x,p) = \min\limits_{u\in P}\langle p, f(t,x,u)\rangle + g(t,x,u)$ и множество $U^0(t,x,p) = \{u^0\in P\colon \langle p, f(t,x,u^0)\rangle + g(t,x,u^0) = H(t,x,p)\}$.