Булгаков Александр Иванович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии, e-mail: aib@tsu.tmb.ru.

Малютина Елена Валерьевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры алгебры и геометрии, e-mail: zont85@mail.ru.

Филиппова Ольга Викторовна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, ассистент кафедры алгебры и геометрии, e-mail: aib@tsu.tmb.ru.

УДК 517.93

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА δ-РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

© **А. И. Булгаков, В. В. Скоморохов, О. В. Филиппова**

Ключевые слова: дифференциальные включения с импульсными воздействиями; аппроксимирующее отображение; радиус внешних возмущений; модуль непрерывности отображения; δ-решение.

В работе дано определение приближенного решения (δ-решения) дифференциального включения с импульсными воздействиями, установлены ассимптотические свойства множеств решений аппроксимирующих дифференциальных включений с внешними возмущениями. Найдено необходимое и достаточное условие устойчивости аппроксимации дифференциальных включений относительно внешних возмущений.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное векторное пространство с нормой $|\ |$, $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathbf{X}$ — нормированное пространство с нормой $\|\ \|_{\mathbf{X}}$. Обозначим $B_X[x,\varepsilon]$ — открытый шар пространства X с центром в точке $x\in X$ и радиусом $\varepsilon>0$. Пусть $U\subset X$. Тогда $\overline{U}$ — замыкание множества U; $\mathrm{co}\,U$ — выпуклая оболочка множества U; $h^+_{\mathbf{X}}[U_1;U]\equiv \sup\limits_{x\in U_1}\rho_{\mathbf{X}}[x,U]$ — полуотклонение по Хаусдорфу множества $U_1\subset \mathbf{X}$ от множества U в пространстве $\mathbf{X}$; $h_{\mathbf{X}}[U_1;U]=\max\{h^+[U_1;U];h^+[U;U_1]\}$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U в пространстве $\mathbf{X}$.

Пусть $\mathcal{U}\in[a,b]$ — измеримое по Лебегу множество. Обозначим $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$ пространство суммируемых по Лебегу функций $x:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})}=\int\limits_{\mathcal{U}}|x(s)|ds$.

Пусть $t_k\in[a,b]$ $(a<t_1<\ldots<t_m<b)$ — конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_m,b]$ ограниченных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k=1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}=\sup\{|x(t)|:\ t\in[a,b]\}$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t)\in F(t,x(t)),\quad t\in[a,b], \tag{1}$$

$$\Delta(x(t_k))=I_k(x(t_k)),\ k=1,\ldots,m, \tag{2}$$

$$x(a) = x_0, \tag{3}$$

отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,...,m$, непрерывны, $\Delta(x(t_k)) = x(t_k+0) - x(t_k)$, $k = 1,2,...,m$.

Под *решением задачи* (1)–(3) будем понимать функцию $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такое $q \in \mathbf{L}^n[a,b]$, что при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется включение $q(t) \in F(t,x(t))$ и при всех $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^{m} \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)), \tag{4}$$

где $\Delta(x(t_k))$, $k = 1,...m$ удовлетворяют равенствам (2).

Обозначим через $K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ множество всех функций $\eta\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty) \to$ $\to [0,\infty)$, обладающих следующими свойствами:

1) при каждых $(x,\delta) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ функция $\eta(\cdot,x,\delta)$ измерима;

2) при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $\delta \in [0,\infty)$ функция $\eta(t,\cdot,\delta)$ непрерывна;

3) для каждых $U \in \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta \in [0,\infty)$ существует такая суммируемая функция $m_{U,\delta}\colon [a,b] \to [0,\infty)$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x \in U$ и $\tau \in [0,\delta]$ выполняется неравенство $\eta(t,x,\tau) \leqslant m_{U,\delta}(t)$;

4) при почти всех $t \in [a,b]$ и каждого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются равенства $\lim_{\substack{z\to x\\ \delta\to 0+0}} \eta(t,z,\delta)$ $= 0$, $\eta(t,x,0) = 0$.

Заменим в определении множества $K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ условие 3 на более сильное требование, в котором функция $m_{U,\delta}(\cdot)$ есть константа. Соответствующее этому требованию подмножество множества $K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ обозначим через $\widetilde{K}([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$.

$P([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ — множество всех функций $\eta\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty) \to [0,\infty)$, обладающих всеми свойствами из множества функций $K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, а также удовлетворяющих следующим условиям: для каждых $U \in \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta \in (0,\infty)$ найдутся такие числа $r(U,\delta) > 0$ и $\beta(U,\delta) \geqslant 0$, что при почти всех $t \in [a,b]$ всех $x \in U$ число $r(U,\delta)$ удовлетворяет неравенству $r(U,\delta) \leqslant \eta(t,x,\delta)$, а для числа $\beta(U,\delta)$ при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x \in U$ и $\tau \in [0,\delta]$ имеет место оценка $\eta(t,x,\tau) \leqslant \beta(U,\delta)$.

Пусть $\psi(\cdot,\cdot,\cdot) \in \widetilde{K}([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Определим функцию $\varphi(\psi)\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty) \to$ $\to [0,\infty)$ равенством

$$\varphi(\psi)(t,x,\delta) = \sup_{y\in B[x,\psi(t,x,\delta)]} h[F(t,x),F(t,y)]. \tag{5}$$

Значения функции $\varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot)$ в точке (t,x,δ) будем называть *модулем непрерывности отображения* $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ в точке (t,x) по переменной x в шаре $B[x,\psi(t,x,\delta)]$, функцию $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ — *функцией радиуса модуля непрерывности* или просто радиусом непрерывности, а саму функцию $\varphi(\psi)(\cdot,\cdot,\cdot)$ — *функцией модуля непрерывности* или просто модулем непрерывности отображения $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ относительно радиуса непрерывности $\psi(\cdot,\cdot,\cdot)$ [1–7].

Будем говорить, что многозначное отображение $\widetilde{F}\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ *аппроксимирует* отображение $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, если найдется такая функция $\xi(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $(x,\delta) \in \mathbb{R}^n\times[0,\infty)$ выполняется оценка

$$h[F(t,x),\widetilde{F}(t,x,\delta)] \leqslant \xi(t,x,\delta). \tag{6}$$

Отображение $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *аппроксимирующим отображение* $F(\cdot,\cdot)$ или просто аппроксимирующим. Функция $\xi(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ в неравенстве (6) определяет степень близости значения $\widetilde{F}(t,x,\delta)$ в точке $(t,x) \in [a,b]\times\mathbb{R}^n$ к значению $F(t,x)$

для каждого фиксированного $\delta \in [0, \infty)$. Эту функцию $\xi(\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *степенью аппроксимации отображения* $F\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ *отображением* $\widetilde{F}\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ или просто степенью аппроксимации.

Пару $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ будем называть *аппроксимацией отображения* $F(\cdot,\cdot)$ или просто аппроксимацией. Пару $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ будем называть *аппроксимацией вложением*, если при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $(x,\delta) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ выполняется включение $F(t,x) \subset \widetilde{F}(t,x,\delta)$.

Значения аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ могут вычисляться с некоторой степенью точности, которую можно задать некоторой функцией $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$.

В связи с этим рассмотрим отображение $Q_\eta\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, определенное равенством

$$Q_\eta(t,x,\delta) = \widetilde{F}(t,x,\delta)^{\eta(t,x,\delta)}, \tag{7}$$

где функция $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ в каждой точке $(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном $\delta \in [0,\infty)$ определяет погрешность вычисления значений аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$. Далее, функцию $\eta(\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *радиусом внешних возмущений аппроксимирующего отображения* $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ или просто радиусом внешних возмущений.

Пусть $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ и пусть пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot,\cdot)$. Рассмотрим при каждом фиксированном $\delta \in [0,\infty)$ дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in Q_\eta(t, x(t), \delta), \quad t \in [a,b], \tag{8}$$

где отображение $Q_\eta\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ задано равенством (7). Дифференциальное включение (8) будем называть *аппроксимирующим дифференциальное включение* (1) *с внешними возмущениями.*

Каждое решение $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ дифференциального включения (8) с импульсными воздействиями (2) и начальным состоянием (3) будем называть δ*-решением* (приближенным решением) *включения* (1).

Пусть отображение $F\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x}(t) \in \mathrm{co}\, F(t, x(t)), \quad t \in [a,b], \tag{9}$$

$$\Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k)), \ k = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

$$x(a) = x_0, \tag{11}$$

где $\mathrm{co}\, F(\cdot, x(\cdot))$ – выпуклая оболочка множества $F(\cdot, x(\cdot))$, отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$, непрерывны, $\Delta(x(t_k)) = x(t_k + 0) - x(t_k)$, $k = 1, 2, ..., m$.

Обозначим через $H(V)$, $H_{\mathrm{co}}(V)$ множества решений задач (1)–(3) и (9)–(11), соответственно, принадлежащих множеству $V \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, а через $H_{\eta(\delta)}(V)$ — множество всех δ-решений задачи (9)–(11) при заданном $\delta > 0$, принадлежащих множеству $V \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Замыкания этих множеств будем рассматривать в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, через V^δ будем обозначать замкнутую δ-окрестность множества V в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$.

Пусть пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображение $F \,\mathrm{co}\, lon[a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ вложением.

Т е о р е м а 1. *Пусть* V *— ограниченное замкнутое множество пространства* $\widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b]$, *и пусть* $\psi(\cdot,\cdot,\cdot) \in P([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. *Далее, пусть пара* $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ *аппроксимирует отображение* $F(\cdot,\cdot)$ *вложением. Тогда для любой функции*

$\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, для которой существует такое число $\varepsilon > 0$, что при почти всех $t\in[a,b]$ всех $x\in(U(V))^{\varepsilon}$ и $\delta\in[0,\infty)$ выполняется оценка

$$\varphi(\psi)(t,x,\delta) \leqslant \eta(t,x,\delta),$$

и справедливо равенство

$$H_{\mathrm{co}}(V) = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(V^{\delta})}, \tag{12}$$

где $\overline{H_{\eta(\delta)}(V^{\delta})}$ — замыкание в пространстве $\widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b]$ множества $H_{\eta(\delta)}(V^{\delta})$, V^{δ} — замкнутая в пространстве $\widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b]$ δ-окрестность множества V.

Пусть V — ограниченное замкнутое множество пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Будем говорить, что *аппроксимация дифференциального включения* (1) *устойчива на ограниченном замкнутом множестве $V \subset \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b]$ относительно внешних возмущений из класса* $\Omega\subseteq K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, если для любой функции $\eta(\cdot,\cdot,\cdot)\in\Omega$ выполняется равенство

$$\overline{H(V)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(V^{\delta})}. \tag{13}$$

Т е о р е м а 2. *Пусть V — ограниченное замкнутое множество пространства $\widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b]$. Далее, пусть пара $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot),\xi(\cdot,\cdot,\cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot,\cdot)$ вложением. Тогда для того, чтобы для любой функции $\eta(\cdot,\cdot,\cdot)\in K([a,b]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ аппроксимация дифференциального включения была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы для задачи (1)–(3) на множестве V выполнялось равенство*

$$\overline{H(V)} = H_{\mathrm{co}}(V).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hajek O.* Discontinuous differential equations. I, II. // Journ. of Dif. Equat. 1979. V. 32. T. 2. C. 149–185.
2. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
3. *Булгаков А.И., Скоморохов В.В.* Аппроксимация дифференциальных включений // Мат. сб. 2002. Т. 193. № 2. С. 35–52.
4. *Толстоногов А.А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск : Наука, 1986.
5. *Булгаков А.И.* Интеграьные включения с невыпуклыми образами и их приложения к краевым задачам дифференциальных включений // Мат. сб. 1992. Т. 183. № 10. С. 63–86.
6. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.
7. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. С. 480.

Поступила в редакцию 10 апреля 2011 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09–01–97503, № 11–01–00645, № 11–01–00626), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы».

Bulgakov A.I., Skomorochov V.V., Filippova O.V. Asymptotic properties of the set of δ-solutions to differential inclusion with impulses. In the work there is given the definition of the δ-solution to differential inclusion with impulses. The asymptotic properties of solutions sets to approximating differential inclusions with external disturbance are derived. The necessary and sufficient condition of stability of approximations of differential inclusions respect to external disturbances is found.

Key words: differential inclusion with impulses; approximating mapping; radius of external disturbance; modulus of a continuity of mapping; δ-solution.

Булгаков Александр Иванович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии, e-mail: aib@tsu.tmb.ru.

Скоморохов Виктор Викторович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: uaa@nnn.tstu.ru.

Филиппова Ольга Викторовна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, ассистент кафедры алгебры и геометрии, e-mail: aib@tsu.tmb.ru.

УДК 517.988.6

О РАЗРЕШИМОСТИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА И НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ

© **Е. О. Бурлаков**

Ключевые слова: операторы Volterra; непрерывная зависимость решений уравнений от параметров; локально липщицевы операторы.

Для уравнения Volterra в произвольном функциональном пространстве получены условия существования единственного глобального или предельно продолженного решения и его непрерывной зависимости от параметров уравнения.

Пусть $Y = Y([a,b],\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство функций, определенных на $[a,b]$, со значениями в $\mathbb{R}^n$ и нормой $\|\cdot\|_Y$; $L_\infty([a,b],\mu,\mathbb{R}^n)$ — пространство измеримых существенно ограниченных функций $y:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|y\|_{L_\infty} = \operatorname{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}|y(t)|$.

О п р е д е л е н и е 1. Оператор $\Psi : Y \to Y$ называется вольтерровым [1], если для всякого $\xi \in (0,b-a)$ и любых $y_1,y_2 \in Y$ из того, что $y_1(t) = y_2(t)$ на $[a,a+\xi]$, следует $(\Psi y_1)(t) = (\Psi y_2)(t)$ на $[a,a+\xi]$.

Всюду ниже предполагается, что в пространстве Y выполнено V-условие [2]: для произвольных $y \in Y$, $\{y_i\} \subset Y$, таких что $\|y_i - y\|_Y \to 0$, и любого $\xi \in (0,b-a)$, если $y_i(t) = 0$ на $[a,a+\xi]$ при всех $i = 1,2,\ldots,$ то $y(t) = 0$ на $[a,a+\xi]$.

Для каждого $\xi \in (0,b-a)$ обозначим $Y_\xi = Y([a,a+\xi],\mathbb{R}^n)$ линейное пространство сужений y_ξ на $[a,a+\xi]$ функций $y \in Y$. Зададим норму в этом пространстве равенством $\|y_\xi\|_{Y[a,a+\xi]} = \inf\|y\|_Y$, где нижняя грань вычисляется по всевозможным продолжениям $y \in Y$ функции y_ξ. Тогда, в силу V-условия, пространство Y_ξ становится банаховым. Положим, $Y_{b-a} = Y$.

Возьмем любое $\xi \in (0,b-a)$. Пусть отображение $P_\xi : Y_\xi \to Y$ произвольным образом доопределяет каждый $y_\xi \in Y_\xi$ на весь отрезок $[a,b]$. Далее зададим отображение $E_\xi : Y \to Y_\xi$, $(E_\xi y)(t) = y(t)$, $t \in [a,a+\xi]$. При $\xi = b-a$ эти отображения $P_{b-a}, E_{b-a} : Y \to Y$ считаем тождественными. Для вольтеррова оператора $\Psi : Y \to Y$ определим оператор $\Psi_\xi : Y_\xi \to Y_\xi$, $\Psi_\xi y_\xi = E_\xi \Psi P_\xi y_\xi$.