ЛИТЕРАТУРА

1. *Буевич Ю.А., Колесникова Н.А., Минаев Г.А.* Плоские задачи газораспределения в зернистых слоях. М., 1979 (Препринт ИПМ АН СССР: № 129).

2. *Мархевка В.И., Басов В.А., Мелик-Ахназаров Г.Х., Оречко Д.И.* Исследование истечения газовых струй в псевдоожиженный слой // Теоретические основы химической технологии, 1971, том 5, № 1.

3. *Сазонов А.Ю.* Об одной плоской задаче фильтрации газа // Вестник Тамбовского ун-та, 2003, том 8, вып. 1, 165–166.

4. *Сазонов А.Ю.* Некоторые задачи газораспределения в зернистом слое в аппаратах колосникового типа // Вестник Тамбовского ун-та, 2003, том 8, вып. 3, 448, 449.

О ПРИМЕНЕНИИ МНОГОЗНАЧНОГО ОПЕРАТОРА НЕМЫЦКОГО ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© Л.И. Ткач

Пусть Y - банахово пространство, обозначим $\Omega(Y)$ - множество всех непустых, ограниченных, замкнутых, выпуклых подмножеств пространства Y. Пусть $A \subset Y$, обозначим $||A||_Y = \sup\limits_{a \in A} ||a||_Y$.

Пусть $\Phi_1, \Phi_2 \subset Y$. Тогда $h^+{}_Y[\Phi_1, \Phi_2] \equiv \sup\{\rho_Y[y, \Phi_2] : y \in \Phi_1\}$, где $\rho_Y[\cdot,\cdot]$ - расстояние между точкой и множеством, $h_Y[\Phi_1, \Phi_2] \equiv \max\{h^+{}_Y[\Phi_1, \Phi_2], h^+{}_Y[\Phi_2, \Phi_1]\}$ - хаусдорфово расстояние между множествами Φ_1 и Φ_2.

Пусть R^n - пространство n-мерных вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$; comp$[R^n]$ - множество всех непустых компактов пространства R^n. Пусть $\mathcal{U} \subset [a,b]$ - измеримое по Лебегу множество, ($\mu(\mathcal{U}) > 0$, μ - мера Лебега). Обозначим $L^n(\mathcal{U})$ пространство функций $x : \mathcal{U} \to R^n$ с суммируемыми по Лебегу компонентами и нормой $||x||_{L^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|\, ds$; $C^n(D^n)$ - пространство непрерывных (абсолютно непрерывных) функций $x : [a,b] \to R^n$ с нормой $||x||_{C^n} = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$ ($||x||_{D^n} = |x(a)| + ||\dot{x}||_{L^n[a,b]}$). C^1_+ - конус неотрицательных функций пространства C^1.

Будем говорить, что для непрерывного оператора $\mathcal{A} : C^1_+ \to C^1_+$ сходятся последовательные приближения, если для любой функции $y_0 \in C^1_+$, удовлетворяющей неравенству $y_0 \le \mathcal{A}y_0$, последовательность функций y_i, $i = 0,1,2,\ldots$, ($y_{i+1} = \mathcal{A}y_i$, $i = 0,1,2,\ldots$) сходится в пространстве C^1 при $i \to \infty$ к функции y, независящей от функции y_0.

Будем говорить, что множество $\Psi \subset L^n[a,b]$ выпукло по переключению, если для любых измеримых по Лебегу множеств $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset [a,b]$, таких что $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \varnothing$, $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = [a,b]$ и любых $x, y \in \Psi$ справедливо включение $\chi(\mathcal{U}_1)x + \chi(\mathcal{U}_2)y \in \Psi$, где $\chi(\cdot)$ - характеристическая функция соответствующих множеств. Обозначим через $\Pi[L^n[a,b]]$ ($\Omega(\Pi[L^n[a,b]])$) множество всех непустых, замкнутых, ограниченных и выпуклых по переключению (всех непустых, выпуклых, замкнутых, ограниченных и выпуклых по переключению) подмножеств из $L^n[a,b]$.

Измеримость множеств везде понимается по Лебегу, измеримость многозначных отображений будем понимать в смысле [1].

Рассмотрим краевую задачу

$$(\mathcal{L}x)(t) \in F(t, x(t)), \qquad t \in [a,b]; \qquad lx \in \varphi(x), \tag{1}$$

где $\mathcal{L} : D^n \to L^n[a,b]$, $l : D^n \to R^n$ - линейные непрерывные операторы и $\varphi : C^n \to \Omega(R^n)$ - многозначное отображение. Пусть оператор $\Lambda : L^n[a,b] \to D^n$ определен равенством $(\Lambda z)(t) = \int\limits_a^t z(s)ds$. Запишем отображение $\mathcal{L}$ в виде $\mathcal{L}x = Q\dot{x} + A(\cdot)x(a)$, где оператор $Q : L^n[a,b] \to L^n[a,b]$ (главная часть оператора $\mathcal{L}$ в этом представлении), $Q = \mathcal{L}\Lambda$, каждый столбец $n \times n$ - матрицы $A(t)$ представляет собой результат применения оператора $\mathcal{L}$ к соответствующему столбцу единичной матрицы: $A(t) = (\mathcal{L}E)(t)$. Будем предполагать, что оператор Q имеет обратный и обратный оператор $Q^{-1} : L^n[a,b] \to L^n[a,b]$ непрерывен.

Под решением задачи (1) будем понимать такую функцию $x \in D^n$, которая удовлетворяет и первому, и второму включениям в (1).

Далее, будем предполагать, что линейная однородная задача

$$\mathcal{L}x = 0, \quad lx = 0 \tag{2}$$

имеет только нулевое решение. В этом случае существует непрерывный оператор Грина $G : L^n[a,b] \to D^n$, определенный равенством

$$(Gz)(t) = \int_a^b G(t,s)z(s)ds, \quad t \in [a,b]. \tag{3}$$

Многозначное отображение $F : [a,b] \times R^n \to \mathrm{comp}[R^n]$ удовлетворяет условиям: найдется неотрицательная функция $\beta \in L^1[a,b]$, что для любых $x, y \in R^n$ и при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$h_{R^n}[F(t,x), F(t,y)] \leq \beta(t)|x - y|; \tag{4}$$

для любого $x \in R^n$ многозначное отображение $F(\cdot, x)$ измеримо; функция $||F(t,0)||_{R^n}$ суммируемая.

Рассмотрим также краевую задачу

$$\mathcal{L}x \in \Phi(x), \qquad lx \in \varphi(x), \tag{5}$$

где $\Phi : C^n \to \Pi[L^n[a,b]]$ - многозначное отображение, $\mathcal{L}, l, \varphi$ - определены выше.

Л е м м а. *Краевая задача* (5) *эквивалентна интегральному включению*

$$x \in X(\cdot)\varphi(x) + G\Phi(x), \tag{6}$$

где $X(\cdot)$ *- фундаментальная матрица решений первого уравнения (2), удовлетворяющая условию* $l(X) = E$ *(*E *- единичная матрица, матрица* $l(X)$ *представляет собой результат применения оператора* l *к соответствующему столбцу матрицы* X*). Любое решение* x *включения (6) однозначно представимо в виде* $x = X(\cdot)c + Gz$*, где* $c \in \varphi(x)$*,* $z \in \Phi(x)$.

Напомним, что оператор Немыцкого $N_F : C^n \to \Pi[L^n[a,b]]$, порожденный многозначным отображением $F : [a,b] \times R^n \to \mathrm{comp}[R^n]$, определяется равенством $N_F(x) = \{y \in L^n[a,b] : y(t) \in F(t, x(t))$ при п.в. $t \in [a,b]\}$.

Если между многозначными отображениями Φ и F можно установить взаимосвязь $\Phi = N_F$, то изучение одной из краевых задач сводится к другой краевой задаче. Используя эту взаимосвязь, можно получить (см. [2]) следующее утверждение о разрешимости задачи (1) и о "близости" решения задачи (1) к наперед заданной функции $q \in C^n$.

Пусть $q \in C^n$, $r_0 \in \varphi(q)$ и $w_0 \in L^n[a,b]$. Представим функцию q равенством

$$q = X(\cdot)r_0 + Gw_0 + e, \tag{7}$$

где $e = q - X(\cdot)r_0 - Gw_0$. Пусть, далее, функция $\kappa \in L^1[a,b]$ для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{L^n(\mathcal{U})}[w_0, N_F(q)] \leq \int_{\mathcal{U}} \kappa(s)ds, \tag{8}$$

функция $\nu_\varepsilon \in C^1_+$ для любого $t \in [a,b]$ определена соотношением

$$\nu_\varepsilon(t) = \int_a^b |G(t,s)|(\varepsilon + \kappa(s))ds + \varepsilon + |e(t)|, \quad \varepsilon \geq 0, \tag{9}$$

где $|G(t,s)|$ - согласованная с пространством R^n норма $n \times n$ - матрицы $G(t,s)$ в представлении (3).

Будем говорить, что многозначное отображение φ и произведение GN_F обладают свойством $\widetilde{C}^\nu$, если найдется число $\alpha \geq 0$, что для любых $x, y \in C^n$ отображение φ удовлетворяет неравенству

$$h_{R^n}[\varphi(x), \varphi(y)] \leq \alpha||x - y||_{C^n}; \tag{10}$$

для непрерывного оператора $\widetilde{\mathcal{A}} : C^1_+ \to C^1_+$, определенного равенством $(\widetilde{\mathcal{A}}z)(t) = \int_a^b |G(t,s)|\beta(s)z(s)ds +$ $+ \alpha\lambda||z||_{C^1} + \nu(t)$, сходятся последовательные приближения. Здесь функция $\beta \in L^1[a,b]$ и число α удовлетворяют, соответственно, неравенствам (4) и (10); $\lambda = \max\{|X(t)| : t \in [a,b]\}$; $|G(t,s)|$, $|X(t)|$ - согласованные с пространством R^n нормы $n \times n$ - матриц $G(t,s)$ (в представлении (3))и фундаментальной матрицы решений $X(\cdot)$ первого уравнения (2), соответственно; $\nu \in C^1_+$.

Рассмотрим в пространстве C^1 уравнение

$$\psi_\nu(t) = \int_a^b |G(t,s)|\beta(s)\psi_\nu(s)ds + \alpha\lambda||\psi_\nu||_{C^1} + \nu(t). \tag{11}$$

Пусть функция $\widetilde{\nu} \in C^1_+$ определена равенством

$$\widetilde{\nu}(t) = \int_a^b |G(t,s)|\,||F(t,0)||_{R^n} dt, \tag{12}$$

где $|G(t,s)|$ определена выше.

Т е о р е м а. *Пусть отображение φ и произведение GN_F обладают свойствами $\widetilde{C}^{\nu_\varepsilon}$ и $\widetilde{C}^{\widetilde{\nu}}$, где функция ν_ε определена равенством (9), функция $\widetilde{\nu}$ определена равенством (12). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует решение x задачи (1), для которого при любом $t \in [a,b]$ выполняется неравенство $|x(t) -$ $- q(t)| \le \psi_\varepsilon(t)$, при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется оценка $|(\mathcal{L}x)(t) - w_0(t)| \le \varepsilon + \kappa(t) + \beta(t)\psi_\varepsilon(t)$, а также справедливо соотношение $||X(\cdot)(r_0 - lx)||_{C^n} \le \lambda||\psi_\varepsilon||_{C^1} + \varepsilon$, где матрица $X(\cdot)$, число λ, функции q, w_0, вектор r_0, функция β определены выше, ψ_ε - решение уравнения (11) при $\nu = \nu_\varepsilon$.*

Если $N_F : C^n \to \Omega(\Pi[L^n[a,b]])$, то утверждение справедливо и при $\varepsilon = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1.*Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1977.

2.*Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением Гаммерштейна с невыпуклыми образами // Матем. сб., 1998, том 189, № 6, 3–32.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ ПО ЗАДАННОЙ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ПОЛНОЙ И СРЕДНЕЙ КРИВИЗН

© Ю.Г. Фомичева

Проблема устойчивости решения задачи о построении в E^3 поверхности, имеющей своим сферическим изображением открытую полусферу по заданной линейной комбинации $f_i(u,v)(i = 1,\ 2)$ полной и средней кривизн, состоит в оценке близости поверхностей, у которых мало отличаются заданные функции $f_i(u,v)$ в точках с параллельными и одинаково направленными нормалями.

Для опорных функций сравниваемых поверхностей получен следующий результат.

Пусть Φ_1 и Φ_2 регулярные поверхности в E^3, имеющие своим сферическим изображением открытую полусферу, гауссовы и средние кривизны которых связаны условиями:

$$f_i(u,v) = a_i(u,v)K_i(u,v) + b_i(u,v))H_i(u,v), \text{ где } a_i(u,v) > 0,\ f_i(u,v) \in C^1, (i = 1,\ 2) \tag{1}$$